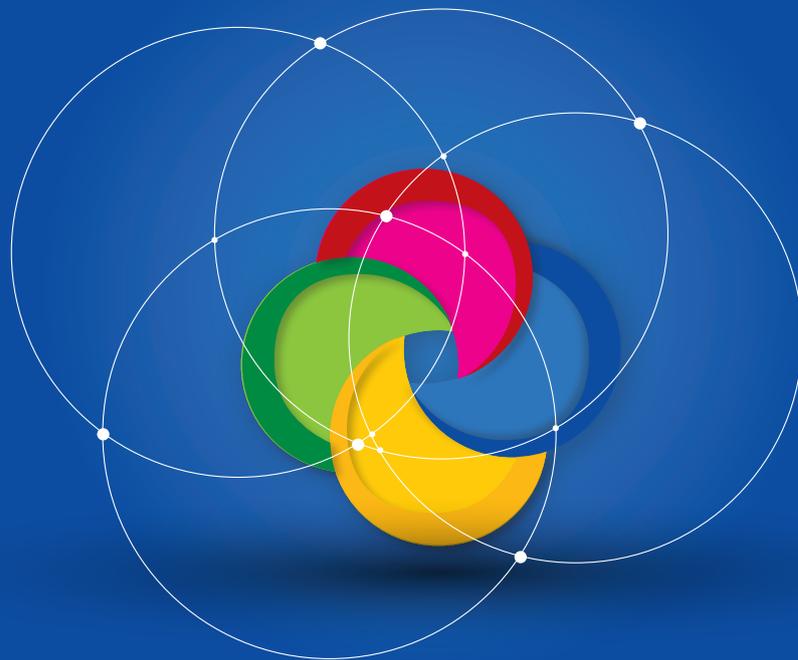


Marco conceptual de

MATEMÁTICA

PISA

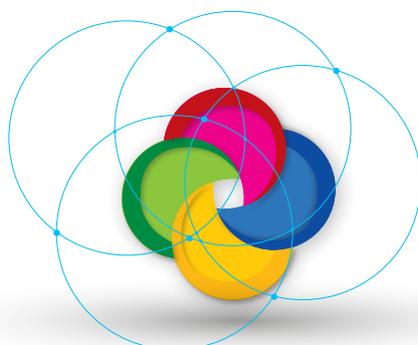


ANEP

CONSEJO
DIRECTIVO
CENTRAL

DIRECCIÓN EJECUTIVA
DE POLÍTICAS
EDUCATIVAS

DIRECCIÓN SECTORIAL
DE PLANIFICACIÓN
EDUCATIVA



ANEP / Programa

PISA

Uruguay

Marco conceptual de MATEMÁTICA

Actualizado por OECD-PISA en 2022



ANEP

CONSEJO
DIRECTIVO
CENTRAL

DIRECCIÓN EJECUTIVA
DE POLÍTICAS
EDUCATIVAS

DIRECCIÓN SECTORIAL
DE PLANIFICACIÓN
EDUCATIVA

División de Investigación,
Evaluación
y Estadística



Contenido

1. Introducción.....	7
2. La competencia matemática en PISA 2022	9
• Definición de competencia matemática en PISA.....	11
• Un vínculo explícito con una variedad de contextos para los problemas en PISA 2022.....	17
• Un papel visible para las herramientas matemáticas, incluido la tecnología en PISA 2022	17
3. Organización del Dominio	18
• Procesos de razonamiento matemático y resolución de problemas.....	18
• Conocimiento del contenido matemático.....	26
• Contextos de las actividades de la evaluación y habilidades seleccionadas del siglo XXI	32
4. Evaluación de la competencia matemática	36
• Estructura de la evaluación en Matemática de PISA 2022	36
• Distribución deseada de puntajes por razonamiento matemático y resolución de problemas.....	36
• Distribución deseada de puntajes por categoría de contenido	41
• Ítem en un variado rango de dificultad	37
• Evaluación de Matemática basada en computadora	41
• Diseño de los ítems de Matemática en PISA 2022.....	43
• Codificación de las respuestas dadas a los ítems.....	45
• Informar sobre el dominio matemático	45
5. Competencia matemática y los cuestionarios de factores asociados a los desempeños	46
• Razonamiento matemático.....	47
• Pensamiento computacional	47
• Cuatro áreas de contenido focal	48
• Habilidades del siglo XXI en el contexto matemático	48
6. Resumen.....	50
7. Referencias	51
Anexo. Ejemplos ilustrativos	54

1. Introducción

Uruguay participa desde el año 2003 en la evaluación internacional PISA, por lo que tal vez no necesite presentación, ya que desde esa fecha muchas páginas se han escrito tanto para describir el programa como para marcar sus fortalezas y alertar sobre sus limitaciones. Sin embargo, es posible que la información y las herramientas que brinda este estudio se puedan tomar cada vez con mayor dimensión a la hora de pensar en educación en general y en educación matemática en particular. Desde que Uruguay participa en esta evaluación se han publicado informes de resultados y también otros con las características de los marcos conceptuales que sostienen y justifican las actividades que se proponen en la prueba, con ejemplos de esas actividades y con análisis acerca de las habilidades socioemocionales asociadas a los desempeños en estas pruebas.¹

En términos generales, el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes, PISA es el mayor estudio comparativo internacional con ciclos de tres años, desde el año 2000,² que surge en el marco de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE) y en el que participan más de 80 países o economías. Tiene por principal objetivo informar en qué medida los estudiantes de 15 años activos en los sistemas educativos de los países y economías participantes han desarrollado las habilidades y adquirido los conocimientos necesarios para participar en la sociedad como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. PISA genera datos sobre el nivel de desempeño de los estudiantes a partir de pruebas en Lectura, Matemática y Ciencias Naturales y, al mismo tiempo, el grado de equidad de oportunidades de aprendizaje en cada país. Así, el estudio además releva una amplia gama de resultados educativos, entre los que se encuentran: la motivación de los alumnos para aprender, la concepción que éstos tienen sobre las áreas evaluadas, sus estrategias de aprendizaje así como algunos aspectos de la gestión de los centros y el clima de aula. Además incorpora otras áreas de evaluación, más allá de las directamente relacionadas con las asignaturas de los currículos, como por ejemplo, resolución de problemas o pensamiento creativo.

Se considera importante, tanto para los responsables de formular políticas educativas como para aquellos que participan más directamente en la educación de los estudiantes, el disponer de información sobre qué tan efectivamente los jóvenes pueden interactuar con las propuestas de evaluación, activar procesos cognitivos, abordar contenidos disciplinares asociados y responder a las preguntas planteadas. Los datos brindan, al mismo tiempo, una oportunidad para informar y cuestionar sobre el grado de desarrollo de las competencias de los estudiantes así como para reflexionar acerca de resultados de las políticas educativas de un país y de las prácticas docentes implementadas. Este estudio facilita un importante cúmulo de información para dirigir en tal sentido la reflexión.

En cada ciclo de PISA el estudio hace foco en una de las áreas de competencia evaluada.³ La evaluación de la competencia en Matemática ha sido foco del estudio en 2003 y 2012 y lo será en 2022. Cuando

1 Los materiales producidos por el Programa PISA Uruguay se encuentran publicados en su la página web de ANEP.

2 Debido a la pandemia de COVID-19 de 2020, el octavo ciclo de la evaluación que debía desarrollarse en 2021 fue pospuesto un año a 2022.

3 Esto cambiará en el futuro una vez que la prueba sea adaptativa en todas las áreas evaluadas, como lo fue en Lectura en 2018 y lo será en Matemática en 2022.

un área determinada es foco del estudio se aprovecha la oportunidad para reformular (no refundar) y actualizar ciertos aspectos del marco conceptual en el que se basan las actividades de prueba, así como para aumentar en cantidad y en calidad las evidencias sobre el desarrollo de la competencia en el área. Estas mejoras al marco conceptual de un área, entre una y otra edición, para el área foco del estudio, esto es cada 9 años, se realizan con el cuidado de mantener posible la comparabilidad de los resultados en el tiempo. En las ediciones donde se hace énfasis en un área los cambios significativos tanto del marco conceptual como de los objetivos y el alcance de la prueba buscan adaptarse a los avances en la sociedad y a los requerimientos de las autoridades de los países e instituciones que serán usuarios de los datos que se obtengan. Posteriormente, también se profundiza y se incorporan los cambios que la evidencia propone en la descripción de los desempeños mostrados por los estudiantes. Entonces, si bien los cambios en los marcos conceptuales son importantes para actualizar y mantener la vigencia de la prueba, siempre están supeditados a mantener el equilibrio para poder estudiar las tendencias con respecto a los resultados de los ciclos anteriores y entre los países participantes. Esta tensión entre lo que se mantiene y lo que cambia puede concebirse como una fortaleza. Por un lado, entonces, la prueba debe permitir comparar los resultados con los obtenidos en ediciones anteriores y al mismo tiempo acompañar los cambios de la sociedad, en particular aquellos que tienen una relación directa con el desarrollo de la competencia evaluada.

En el ciclo 2022 también hay cambios en lo referente al modo de aplicación de la prueba para Matemática. Si bien en las ediciones de 2015, con foco en Ciencias Naturales, y 2018 con foco en Lectura, se aplicó la prueba utilizando la computadora, las actividades de la evaluación en Matemática no tuvieron ninguna diferencia con las de la prueba aplicada en ciclos anteriores en formato papel. En el caso de la evaluación 2022 será la primera edición de PISA en la que la prueba de Matemática explotará las potencialidades del útil informático al servicio de la evaluación del desarrollo del razonamiento matemático y en resolución de problemas. Además, el hecho de que la prueba esté diseñada para la aplicación informatizada permitirá adaptar el recorrido de cada estudiante a su grado de desarrollo en la competencia. Esta modalidad adaptativa funciona gracias a un algoritmo que propone gradualmente al estudiante cada actividad de mayor o menor dificultad según cómo haya respondido a las actividades precedentes. Este formato permitirá alcanzar uno de los objetivos de la medición con esta prueba que es mejorar la precisión y profundidad en la descripción del grado de desarrollo de la competencia matemática en los extremos de la escala, esto es el de los estudiantes que evidencian muy bajo logro así como para aquellos que se desempeñan en altos niveles.

2. La competencia matemática en PISA 2022

Las sucesivas actualizaciones del marco conceptual buscan incorporar los cambios que se producen en la sociedad y las consecuencias que estos tienen en la conceptualización de lo que se considera un ciudadano matemáticamente competente. Esto llevó a reexaminar lo que debe evaluarse a la luz de los cambios que se han producido en el mundo, en la disciplina y en las políticas y prácticas educativas. En los últimos tiempos, la digitalización de muchos aspectos de la vida, la ubicuidad de los datos para tomar decisiones personales que involucran inicialmente la educación y la planificación profesional y, más adelante en la vida, la salud y las inversiones, así como los principales desafíos sociales para abordar áreas como el cambio climático, los presupuestos de los estados, el crecimiento de la población, la propagación de enfermedades pandémicas y la economía globalizada, han cambiado el significado de ser matemáticamente competente y estar bien preparado para participar como ciudadano activo que toma decisiones y es comprometido y reflexivo en el siglo XXI.

Las situaciones críticas enumeradas anteriormente, así como otras que enfrentan las sociedades de todo el mundo, tienen un componente cuantitativo. Entenderlas, así como abordarlas, al menos en parte, requiere tener conocimientos matemáticos y pensar matemáticamente. Este pensamiento matemático en contextos cada vez más complejos no está impulsado por la reproducción de los procedimientos computacionales básicos, sino más bien por el razonamiento (tanto deductivo como inductivo). El importante papel del razonamiento necesita un mayor énfasis en nuestra comprensión de lo que significa para los estudiantes ser competentes en Matemática. Además de la resolución de problemas, este marco sostiene que la competencia matemática en el siglo XXI incluye el razonamiento matemático y algunos aspectos del pensamiento computacional.

En la actualidad, los ciudadanos se enfrentan a nuevas oportunidades y desafíos en todos los ámbitos de la vida, muchos de los cuales se derivan del rápido despliegue de computadoras y dispositivos como robots, teléfonos inteligentes y máquinas en red. Por ejemplo, la gran mayoría de los adultos jóvenes y estudiantes que comenzaron la universidad después de 2015 consideran que los teléfonos son dispositivos móviles de mano capaces de compartir voz, textos e imágenes y acceder a Internet, capacidades que muchos de los padres de esa generación y ciertamente por todos sus abuelos consideran ciencia ficción (Beloit College, 2017). El reconocimiento de la creciente discontinuidad contextual entre el siglo pasado y el presente ha suscitado un debate en torno al desarrollo de las habilidades del siglo XXI en los estudiantes (Ananiadou y Claro, 2009; Fadel, Bialik y Trilling, 2015; National Research Council, 2012; Reimers y Chung, 2016).

Es esta discontinuidad la que también impulsa la necesidad de una reforma educativa y el desafío de lograrla. Periódicamente, los educadores, los diseñadores de políticas y otros actores educativos revisan los estándares y políticas de educación pública. En el curso de estas deliberaciones se revisan las respuestas a dos preguntas generales: 1) ¿Qué necesitan aprender los estudiantes? y 2) ¿Qué estudiantes necesitan aprender qué? El argumento más utilizado en defensa de brindar educación matemática para todos los estudiantes es su utilidad en diversas situaciones prácticas. Sin embargo, este argumento por sí solo se debilita con el tiempo desde que se han automatizado muchas actividades simples. No hace mucho tiempo se usaban horarios impresos para planificar viajes; requería una buena comprensión del eje del tiempo y las diferencias horarias, así como la interpretación de tablas complejas de doble entrada. Hoy basta con hacer una consulta directa por Internet.

En cuanto a la cuestión de “qué enseñar”, muchas comprensiones restrictivas surgen de la forma en que se concibe la Matemática si esta área de conocimiento se ve solo como una caja de herramientas útil. Un rastro claro de este enfoque se puede encontrar aún en algunos planes de estudio que se limitan a una lista de temas o procedimientos matemáticos, y se pide a los estudiantes que practiquen algunos seleccionados, en situaciones predecibles (a menudo de prueba). Esta perspectiva de la Matemática es demasiado reducida para el mundo actual. Pasa por alto las características clave de la Matemática para la modelización, el análisis y la predicción de la realidad. También es importante destacar que cada vez más se enfatiza el razonamiento y la importancia de los contextos relevantes en diferentes planes de estudio.

En última instancia, la respuesta a estas preguntas es que todos los estudiantes deben aprender, y tener la oportunidad de aprender, a pensar matemáticamente, utilizando el razonamiento matemático apoyándose en un conjunto de conceptos matemáticos fundamentales que no necesariamente se enseñan explícitamente, sino que se manifiestan y refuerzan a lo largo de las experiencias de aprendizaje del estudiante. Esto provee a los estudiantes de un marco conceptual a través del cual abordar las dimensiones cuantitativas de la vida en el siglo XXI.

El marco de PISA 2022 está diseñado para hacer que la relevancia de la Matemática para los estudiantes de 15 años sea clara y explícita, al tiempo que garantiza que los ítems desarrollados permanezcan en contextos significativos y auténticos. El ciclo matemático de modelización, utilizado en marcos conceptuales de ciclos anteriores (por ejemplo, OCDE (2004; 2013)) para describir las etapas por las que atraviesan las personas para resolver problemas contextualizados, sigue siendo una característica clave del marco de PISA 2022. Se utiliza para contribuir a definir los procesos matemáticos que activan los estudiantes mientras resuelven problemas, procesos que junto con el razonamiento matemático proporcionarán las dimensiones primarias de los informes de resultados.

Además, el papel creciente y evolutivo de las computadoras y de las herramientas informáticas tanto en las situaciones del día a día como en los contextos de resolución de problemas se refleja en el marco conceptual para PISA 2022 cuando plantea que los estudiantes deben poseer y ser capaces de demostrar habilidades de pensamiento computacional y cómo se aplican a su práctica de resolución de problemas. Las habilidades de pensamiento computacional incluyen el reconocimiento de patrones, la generalización, el uso del pensamiento abstracto, la descomposición de patrones, la determinación de cuáles (si las hay) herramientas informáticas podrían emplearse para analizar o resolver un problema, y la definición de algoritmos como parte de una solución detallada. Este marco conceptual para la evaluación de la competencia matemática en los jóvenes escolarizados de 15 años destaca la importancia del pensamiento computacional en su aplicación a las actividades matemáticas y promueve una reflexión sobre el papel del pensamiento computacional en los planes de estudio y la pedagogía de la matemática.

En este contexto, las actividades de la prueba en PISA están diseñadas para la evaluación del nivel de desarrollo de la competencia matemática de los jóvenes y dan cuenta de una concepción de lo que se supone que los estudiantes necesitan saber y saber hacer con lo que han aprendido durante su tiempo de escolarización. Una característica distintiva de esta prueba es que las actividades de la evaluación estén pensadas a partir de contextos auténticos y que permitan identificar y describir los procesos cognitivos que los jóvenes ponen en marcha cuando resuelven y responden a las preguntas propuestas.

Definición de competencia matemática en PISA

Un número creciente de problemas y situaciones que se encuentran en la vida diaria, incluso en contextos profesionales, requieren cierto nivel de comprensión matemática para que puedan entenderse y abordarse adecuadamente. Entonces, ser competente en Matemática es fundamental para la preparación de un joven para participar y contribuir en la sociedad moderna. Por lo tanto, es importante para los sistemas educativos conocer en qué grado los jóvenes que egresan de la educación media están preparados para utilizar sus saberes en Matemática al planificar su futuro, razonar y resolver problemas significativos relacionados con una variedad de cuestiones importantes para ellos.

Como consecuencia, ante una evaluación internacional de estudiantes de 15 años, es razonable preguntarse: “¿Qué es importante que los ciudadanos sepan y puedan hacer en situaciones que involucran Matemática?” Más específicamente, ¿qué significa ser matemáticamente competente para un joven de 15 años, que esté terminando de cursar el ciclo medio de educación y tal vez preparándose para seguir una formación más especializada? Es importante que el constructo de competencia matemática, que se utiliza en este marco para identificar la capacidad de los individuos para razonar matemáticamente y resolver problemas en una variedad de contextos del siglo XXI, no sea percibido como sinónimo de conocimiento y habilidades mínimas. Su objetivo es brindar las bases para diseñar una evaluación que permita identificar y describir las capacidades de los individuos para razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Esta concepción de la competencia matemática reconoce la importancia de que los estudiantes desarrollen una comprensión sólida de una variedad de conceptos y procesos matemáticos y se den cuenta de los beneficios de participar en exploraciones del mundo real que están respaldados por esos elementos de la Matemática. El constructo de competencia matemática, como se define en PISA, enfatiza fuertemente la necesidad de desarrollar las habilidades de los estudiantes para usar la Matemática en contexto y visualiza la competencia matemática como un atributo que se encuentra en un continuo, en el que algunos individuos tienen más conocimientos matemáticos que otros, y el potencial de crecimiento siempre está presente.

En este escenario que se ha presentado, la definición de competencia matemática que se utiliza como marco de la edición 2022 muestra algunos cambios respecto a la aplicada en ciclos anteriores por lo que vale la pena examinar y reflexionar sobre el proceso realizado en ese sentido así como las implicancias de estos cambios en los nuevos objetivos.

Se presenta a continuación la secuencia con el proceso de transformación de la definición de la competencia matemática que propone evaluar PISA.

La competencia matemática es,

Ciclo 2003:

*“la capacidad de un individuo para identificar y **comprender el rol que la Matemática juegan en el mundo**, para **emitir juicios fundamentados** y **utilizar e involucrarse con la matemática** de forma que se corresponda con las necesidades de su propia vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo”. (OCDE/PISA; 2003)*

Ciclo 2012:

*“la capacidad de los individuos para **formular, emplear e interpretar** la Matemática en una variedad de contextos. Refiere a la capacidad de los individuos para **razonar matemáticamente***

y **usar** conceptos matemáticos procedimientos, datos y herramientas para **describir, explicar, y predecir** fenómenos. Ayuda a los individuos a **reconocer el papel que la Matemática juega en el mundo, a emitir juicios bien fundados y tomar decisiones** que son necesarias en su vida como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos”. (OCDE/PISA; 2012)

Ciclo 2022:

“la capacidad de un individuo para **razonar matemáticamente** y para **formular, emplear e interpretar** la Matemática para **resolver problemas** en una variedad de contextos del mundo. Incluye **utilizar** conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para **describir, explicar y predecir** fenómenos. Ayuda a las personas a **conocer el papel que la Matemática juega en el mundo** además de colaborar en la **elaboración de juicios bien fundados y en la toma de las decisiones** que necesita un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo del siglo 21”. (OCDE/PISA; 2021)

El marco conceptual de la evaluación de PISA 2022, en comparación con los marcos de PISA 2003 y PISA 2012, aunque aprecia y mantiene las ideas básicas de competencia matemática desarrolladas allí, reconoce una serie de cambios en el mundo del estudiante que, a su vez, indican un cambio en la forma de evaluar la competencia matemática en comparación con el enfoque utilizado en marcos anteriores. La tendencia es alejarse de la necesidad de realizar cálculos básicos hacia un mundo que cambia rápidamente impulsado por nuevas tecnologías y tendencias en las que los ciudadanos son creativos y están comprometidos, emitiendo juicios fundados sobre sí mismos y la sociedad en la que viven.

Dado que la tecnología desempeñará un papel cada vez más importante en la vida de los estudiantes, la trayectoria a largo plazo de la competencia matemática también debería abarcar la relación sinérgica y recíproca entre el pensamiento matemático y el pensamiento computacional, presentado como “la forma en que piensan los científicos de la informática” y considerado como un proceso de pensamiento que implica la formulación de problemas y el diseño de sus soluciones en una forma que pueda ser ejecutada por una computadora, un ser humano o una combinación de ambos (Wing 2011). Los roles que juega el pensamiento computacional en Matemática incluyen cómo los temas matemáticos específicos interactúan con temas específicos de computación, y cómo el razonamiento matemático complementa el pensamiento computacional (Gadanidis, 2015; Rambally, 2017). Por ejemplo, Pratt y Noss (2002) discuten el uso de un micro mundo computacional para desarrollar conocimiento matemático en el caso de la aleatoriedad y probabilidad; Gadanidis y colaboradores (2018) proponen un enfoque para involucrar a los niños pequeños con ideas de teoría de grupos, utilizando una combinación de herramientas de pensamiento práctico y computacional. Por lo tanto, mientras que la educación matemática evoluciona en términos de las herramientas disponibles y las posibles formas de ayudar a los estudiantes a explorar las poderosas ideas de la disciplina (Pei, Weintrop y Wilensky, 2018), el uso reflexivo de herramientas de pensamiento computacional y conjuntos de habilidades puede profundizar el aprendizaje de los contenidos matemáticos creando condiciones de aprendizaje efectivas (Weintrop 2016). Además, las herramientas de pensamiento computacional ofrecen a los estudiantes un contexto en el que pueden concretizar constructos abstractos (explorando e interactuando con conceptos matemáticos de una manera dinámica) (Wing 2008), así como expresar ideas de nuevas formas e interactuar con conceptos a través de nuevas tecnologías y herramientas de representación (Grover, 2018; Niemelä, 2017; Pei, Weintrop y Wilensky, 2018; Resnick, 2009).

En la definición para la edición en el 2022 el **razonamiento matemático** es concebido como una forma particular de razonamiento y aparece destacado en una posición de privilegio. Si bien siempre formó parte de la definición, en esta última edición se hace hincapié en su importancia y se le ubica como punto central a la hora de concebir el grado de desarrollo de la competencia matemática de un individuo y

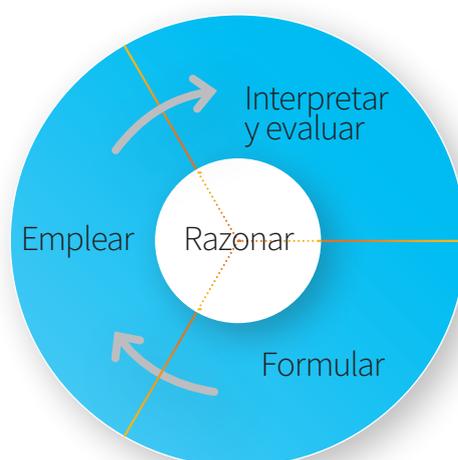
en su articulación con los procesos que se ponen en marcha cuando un estudiante está frente a la tarea de resolver un problema. El razonamiento matemático entonces, juega un rol central en la actividad del estudiante frente al problema y en la articulación entre los procesos cognitivos fundamentales que PISA evalúa: **Formular, Emplear e Interpretar**.

Evaluar el grado de desarrollo de la competencia matemática a partir de los procesos cognitivos que el estudiante pone en marcha cuando enfrenta un problema y que las situaciones en las que se presentan los problemas provengan de **contextos auténticos** y significativos para los estudiantes han sido desde el inicio características identitarias de la evaluación PISA. Entonces, los problemas propuestos tienen similitud con los que puede enfrentar un estudiante en su vida cotidiana, o son parte de los problemas del mundo que se conocen en general, y encuadran en el tiempo las características necesarias para ejercer ciudadanía en el siglo XXI. Esto refleja no solamente una intención de fijar un marco temporal sino que trata, además, de integrar una nueva concepción de la Matemática, donde las tareas mecánicas, procedimentales o algorítmicas deben ir perdiendo fuerza para dar lugar a una actividad crítica y creativa frente al conocimiento; donde la toma de iniciativa, la elaboración de estrategias o el análisis de los datos y su variabilidad, y la toma de decisiones a partir de los datos, se hacen mucho más importantes que la repetición mecánica de procesos que progresivamente han sido ya o serán automatizados. Se enfatiza la necesidad del ciudadano de emplear la Matemática y el razonamiento matemático no solo para resolver situaciones sino también para dar respuesta a ellas con argumentos bien fundados.

Definir la competencia matemática a evaluar equivale a definir qué es lo que se espera de un individuo matemáticamente competente y se asume que el estudiante debe ser evaluado mientras resuelve problemas en contextos auténticos. Desde esta posición, la forma en cómo se define la competencia va a determinar el modelo que busca describir y explicar la actividad del estudiante frente a al problema propuesto.

La figura 1 muestra esquemáticamente los procesos que se ponen en marcha cuando el estudiante resuelve un problema. Los procesos de Formular, Emplear e Interpretar son concebidos como presentes y en interacción durante toda la actividad de resolución de problemas y el razonamiento matemático de manera central y a su vez transversal a estos tres procesos fundamentales. El avance que se propone en PISA 2022 es resaltar la centralidad del razonamiento matemático en ambos, el ciclo de resolución de problemas y la competencia matemática en general.

Figura 1. **Competencia matemática: la relación entre el razonamiento matemático y el ciclo de resolución de problemas** (modelización).



Para que los estudiantes *muestran su competencia en Matemática* deben ser capaces, primero, de usar su conocimiento del contenido matemático para reconocer la naturaleza matemática de una situación (problema) y luego formularla en términos matemáticos. Esta transformación, de una situación del mundo, compleja y tal vez ambigua y desordenada, a un problema matemático bien definido, requiere razonamiento matemático. Una vez que la transformación se realiza con éxito (modelización), el problema matemático resultante debe resolverse utilizando los conceptos, algoritmos y procedimientos matemáticos aprendidos en las aulas. Además, el proceso puede requerir la toma de decisiones estratégicas sobre la selección de herramientas y el orden de su aplicación; esto también es una manifestación del razonamiento matemático. Finalmente, la definición de PISA pone énfasis en la necesidad de que el alumno evalúe la solución matemática obtenida interpretando los resultados dentro de la situación auténtica original.

Aunque el razonamiento matemático y la resolución de problemas de contexto auténtico se conjugan desde el punto de vista cognitivo, hay un aspecto del razonamiento matemático que va más allá de resolver problemas prácticos. El razonamiento matemático también permite evaluar y formular argumentos, evaluando interpretaciones, inferencias y soluciones de problemas que, por su naturaleza, se entienden mejor matemáticamente. La toma de decisiones estratégicas sobre la selección de las herramientas y su orden de aplicación, así como la acción de evaluar y formular argumentos evaluando interpretaciones e inferencias pueden considerarse como diferentes y variadas manifestaciones de razonamiento matemático.

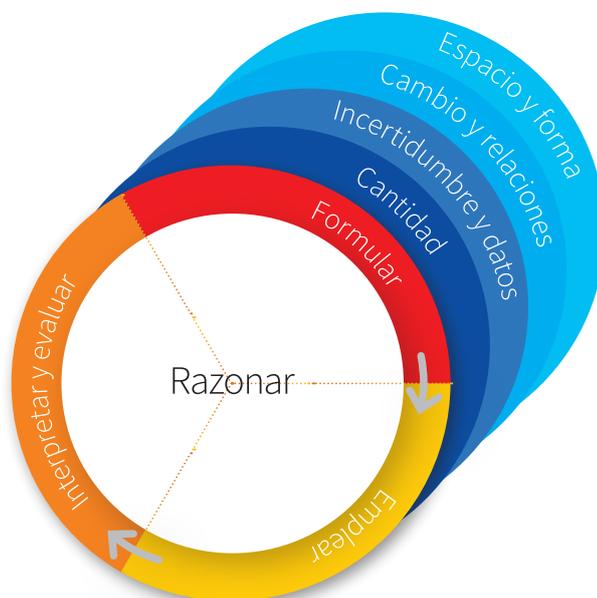
La competencia matemática, por lo tanto, comprende dos aspectos relacionados: el razonamiento matemático y la resolución de problemas. El razonamiento matemático, que va más allá de resolver problemas, abarca la formulación de juicios informados sobre esa importante familia de problemas sociales que pueden abordarse matemáticamente. También va más allá al incluir el emitir juicios sobre la validez de la información que bombardea a los individuos, al considerar sus implicaciones cuantitativas y lógicas. Es aquí donde el razonamiento matemático también contribuye al desarrollo de un conjunto de habilidades del siglo XXI.

Figura 2. **PISA 2022: la relación entre el razonamiento matemático, el ciclo de resolución de problemas (modelización), los contenidos matemáticos, el contexto y las habilidades seleccionadas del siglo XXI.**

Desafío en contexto auténtico

Habilidades del Siglo XXI

- Pensamiento crítico
- Creatividad
- Investigación
- Autorregulación, iniciativa y perseverancia
- Uso de la información
- Pensamiento sistémico
- Comunicación
- Reflexión



Contextos

- Personal
- Ocupacional
- Social
- Científico

El círculo externo de la Figura 2 significa que la competencia matemática se lleva a cabo en el contexto de un desafío o problema que surge en el mundo.

La Figura 2 también presenta la relación entre la competencia matemática, como se muestra en la Figura 1, con los dominios de contenido matemático que se abordan, los contextos de los problemas y las habilidades del siglo XXI seleccionadas que apoyan y se desarrollan a través de la competencia matemática.

Las categorías de contenido matemático incluyen: cantidad, incertidumbre y datos, cambio y relaciones, y espacio y forma. Estas categorías de contenido matemático abarcan aquellos temas que los estudiantes abordan para razonar, formular el problema (transformando la situación dada en una propuesta matemática), resolver el problema matemático formulado e interpretar y evaluar las soluciones obtenidas. Al igual que en los marcos conceptuales de ciclos anteriores, **las cuatro áreas de contexto** que PISA sigue utilizando son: personal, ocupacional, social y científica. El contexto del problema es de naturaleza personal cuando involucra desafíos que podría enfrentar un individuo, su familia o grupo de pares, en cambio, el contexto es social cuando refiere a la propia comunidad, ya sea local, nacional o global, mientras que un contexto es ocupacional cuando se asocia al mundo del trabajo y el contexto es científico si se relaciona con la aplicación de la Matemática al mundo natural y tecnológico.

Se incluyen por primera vez en el marco conceptual de la evaluación PISA (como se ilustra en la Figura 2) una selección de **las habilidades del siglo XXI** en las que se basa y desarrolla la competencia matemática. Esta decisión se ha tomado en vista del interés creciente en todo el mundo por estas habilidades del siglo XXI y su posible incorporación en los sistemas educativos⁴. En la intersección entre las habilidades generales del siglo XXI y las relacionadas pero específicas para la competencia matemática resultan las siguientes ocho habilidades del siglo XXI que han sido seleccionadas para su inclusión en marco de la evaluación:

Pensamiento crítico
Creatividad
Investigación
Autorregulación, iniciativa y perseverancia
Uso de la información
Pensamiento sistémico
Comunicación
Reflexión

Las actividades de la prueba no abordarán deliberadamente las habilidades del siglo XXI, sino que la expectativa es que al responder al espíritu del marco y en línea con la definición de competencia matemática las actividades de la prueba se inspiren en las habilidades del siglo XXI que se han seleccionado así como en los contextos en los que se sitúen.

La definición de competencia matemática en PISA 2022 y su representación en las Figuras 1 y 2 sostiene la noción de **modelización** matemática, que históricamente ha sido piedra angular del marco con-

⁴ La OCDE ha producido una publicación centrada en tales habilidades y ha patrocinado un proyecto de investigación titulado “The Future of Education and Skills: An OECD 2030 Framework”, (El futuro de la educación y las habilidades: un marco conceptual de OCDE 2030) en el que participan 25 países en un estudio internacional de un plan de estudios que incorpora dichas habilidades.

ceptual en PISA para esta área. El ciclo de modelización (formular, emplear, interpretar y evaluar) es un aspecto central en la concepción de jóvenes matemáticamente competentes; sin embargo, no siempre es necesario participar en todas las etapas del ciclo de modelización al resolver un problema y especialmente en el contexto de una evaluación (Galbraith, Henna y Niss, 2007). A menudo ocurre que partes importantes del ciclo de modelización han sido realizadas por otros, y el usuario final lleva a cabo algunos, pero no todos, los pasos del ciclo. Por ejemplo, en algunos casos, se presentan representaciones matemáticas (el modelo de la situación), como gráficos o ecuaciones, que se pueden manipular directamente para responder alguna pregunta o sacar alguna conclusión. En otros casos, los estudiantes pueden estar utilizando una simulación por computadora para explorar el impacto del cambio de una variable en un sistema o entorno. Por esta razón, muchas actividades de prueba involucran solo partes del ciclo de modelización. En realidad, el que resuelve problemas también puede oscilar entre los procesos, volviendo a revisar las decisiones y suposiciones elaboradas. Cada uno de los procesos puede presentar desafíos considerables y pueden requerirse varias iteraciones en todo el ciclo de modelización para dar respuesta a la pregunta planteada.

En particular, los verbos “formular”, “emplear” e “interpretar” señalan los tres procesos cognitivos que los estudiantes pondrán en marcha al resolver problemas. La **formulación** matemática de situaciones involucra la aplicación del razonamiento matemático en la identificación de oportunidades para aplicar y usar matemática, ya sea para comprender o resolver el problema presentado. Incluye poder tomar una situación como se presenta y transformarla en una forma susceptible de ser tratada matemáticamente, proporcionando estructura matemática y representaciones, identificando variables y haciendo suposiciones y simplificaciones para ayudar a resolver el problema o enfrentar el desafío. **Emplear** Matemática implica aplicar el razonamiento matemático mientras se utilizan conceptos de la disciplina, procedimientos, hechos y herramientas para obtener una solución matemática. Incluye realizar cálculos, manipular expresiones u otros modelos matemáticos, analizar información a partir de diagramas y gráficos, desarrollar descripciones y explicaciones y usar herramientas matemáticas. **Interpretar** implica reflexionar sobre soluciones o resultados matemáticos en el contexto del problema. Implica aplicar un razonamiento matemático para evaluar soluciones en relación con el contexto del problema y determinar si los resultados son razonables y tienen sentido en la situación así como determinar qué habrá que destacar al comunicar la solución.

Se incluye por primera vez en el marco de esta evaluación la intersección entre **el pensamiento matemático y el computacional** que genera un conjunto de perspectivas, procesos de pensamiento y modelos mentales que los alumnos necesitan para participar en un mundo cada vez más tecnológico. Un conjunto de prácticas ubicadas bajo el paraguas del pensamiento computacional (a saber, abstracción, pensamiento algorítmico, automatización, descomposición y generalización) también son fundamentales tanto para el razonamiento matemático como para los procesos de resolución de problemas. La naturaleza del pensamiento computacional a la interna de la Matemática y las Ciencias implica prácticas de manejo de datos, de modelización dinámica de conceptos y relaciones, de simulación, reconocimiento de patrones, abstracción, etc. (Dentro y otros, 2016). El pensamiento computacional implica también habilidades que se aplican en la formulación, el empleo, la evaluación e interpretación de resultados, y que incluye, entre otras, la descomposición de un problema en problemas más simples o la capacidad para elegir herramientas informáticas (si las hay) para ser empleadas en el análisis o la resolución de un problema.

Un vínculo explícito con una variedad de contextos para los problemas en PISA 2022

La referencia a “una variedad de contextos del mundo” en la definición de competencia matemática en PISA reconoce que el ciudadano del siglo XXI es usuario, entre otros, de datos y argumentos cuantitativos, a veces de corte estadístico. Las cuatro categorías de contextos seleccionadas (personal, ocupacional, social y científica) reflejan una amplia gama de situaciones en las cuales los individuos pueden encontrar oportunidades matemáticas. La definición también reconoce que ser competente en esta área implica reconocer el papel que la Matemática juega en el mundo y también generar juicios bien fundados y tomar decisiones fundamentadas típicas de ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos frente a mensajes y argumentos como los siguientes: *“un estudio encontró que en promedio ...”*, *“una encuesta muestra una gran caída en ...”*, *“ciertos científicos afirman que por el tipo de crecimiento de la población se superará a la producción de alimentos en un futuro ...”*, etc.

Un papel visible para las herramientas matemáticas, incluido la tecnología en PISA 2022

La definición de alfabetización matemática incluye explícitamente el uso de herramientas matemáticas. Estas herramientas incluyen una variedad de equipos físicos y digitales, software y dispositivos de trazado y de cálculo. Las herramientas matemáticas basadas en computadora son de uso común en los lugares de trabajo del siglo XXI, y son cada vez más frecuentes en la sociedad en general. La naturaleza de los problemas cotidianos y las demandas sobre las personas para emplear el razonamiento matemático en situaciones donde las herramientas computacionales están presentes se ha expandido con estas nuevas oportunidades, intensificando las expectativas en el uso competente de la Matemática.

3. Organización del Dominio

PISA evalúa en qué nivel los estudiantes de 15 años pueden razonar matemáticamente y manejar los contenidos matemáticos con destreza cuando se enfrentan a situaciones y problemas, la mayoría de los cuales se presentan en contextos del mundo. A los efectos de la evaluación, la definición de competencia matemática en PISA se puede analizar desde tres aspectos interrelacionados (presentes en la Figura 2):

- *El razonamiento matemático* (tanto deductivo como inductivo) y *resolución de problemas* (que incluye los procesos matemáticos que describen lo que hacen los individuos para conectar el contexto del problema con la Matemática y así resolver el problema);
- *El contenido matemático* que se aborda en los ítems de evaluación; y
- *Los contextos* en los que se ubican los ítems de evaluación junto con las habilidades del siglo XXI seleccionadas que apoyan y se desarrolladas con la competencia matemática.

Son varias las preguntas basadas en la definición de competencia matemática en PISA 2022 que se encuentran detrás de la organización del marco:

- ¿En qué se involucran los individuos cuando razonan matemáticamente y resuelven problemas matemáticos en contexto?
- ¿Qué conocimiento de contenido matemático podemos esperar de las personas y, en particular, de los estudiantes de 15 años?
- ¿En qué contexto se puede a la vez observar y evaluar la competencia matemática y cómo interactúa con las habilidades del siglo XXI?

Procesos de razonamiento matemático y resolución de problemas

Razonamiento matemático

El razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) implica evaluar situaciones, seleccionar estrategias, sacar conclusiones lógicas, desarrollar y describir soluciones y reconocer cómo se pueden aplicar esas soluciones. Los estudiantes razonan matemáticamente, por ejemplo, cuando:

- Identifican, reconocen, organizan, conectan y representan,
- Construyen, abstraen, evalúan, deducen, justifican, explican y defienden y
- Critican, interpretan, emiten juicios, refutan y califican.

La habilidad de razonar lógicamente y presentar argumentos de manera honesta y convincente es una habilidad importante. La Matemática es una ciencia que trata sobre objetos y conceptos bien definidos que pueden analizarse y transformarse a través del “razonamiento matemático” para obtener conclusiones de las que se puede tener certeza. Además, esas conclusiones son lógicas y objetivas y, por tanto, imparciales, sin necesidad de validación por parte de una autoridad externa. Este tipo de razonamiento, que es útil mucho más allá de la Matemática se puede desarrollar y practicar con mayor eficacia en contexto matemático.

Dos aspectos del razonamiento matemático que son especialmente importantes y se tuvieron en cuenta en el diseño de las actividades de evaluación de PISA. Uno de ellos es la deducción de supuestos

claros (razonamiento deductivo), que es un rasgo característico del proceso matemático. La segunda dimensión importante es el razonamiento estadístico y probabilístico (razonamiento de tipo inductivo). Desde una perspectiva técnica, el mundo actual es cada vez más complejo y sus múltiples dimensiones están representadas por millones de datos. Dar sentido a estos datos es uno de los mayores desafíos que enfrentará la humanidad en el futuro. El sistema educativo debe dar a los estudiantes la posibilidad de familiarizarse con la naturaleza de dichos datos para tomar decisiones informadas en un contexto de variación e incertidumbre.

Entonces, el razonamiento matemático es el núcleo de la competencia matemática y es crucial en su desarrollo, habilitado por algunos conocimientos clave que sustentan la Matemática escolar. Entre estos conocimientos clave se incluyen:

- Comprender la **cantidad**, los sistemas numéricos y sus propiedades algebraicas;
- Valorar el poder de la **abstracción** y la **representación** simbólica;
- Reconocer **estructuras matemáticas** y sus **regularidades**;
- Reconocer **relaciones funcionales** entre cantidades;
- Usar **modelos** matemáticos como una lente para el mundo real (por ejemplo, aquellos que surgen en las ciencias físicas, biológicas, sociales, económicas y del comportamiento); y
- Entender la **variación** como el corazón de la estadística.

La descripción a continuación muestra la manera en que estas ideas afloran lo largo de la Matemática escolar y cómo, al reforzar su presencia en la enseñanza, se favorece que los estudiantes reconozcan su aplicación en nuevos contextos. Comprender la cantidad, los sistemas numéricos y sus propiedades algebraicas.

Comprender la cantidad, los sistemas numéricos y las propiedades algebraicas

La noción básica de cantidad, el sentido del número, puede ser el aspecto matemático más generalizado y esencial de relacionarse con el mundo y funcionar en él (OCDE, 2017, p. 18). En el nivel más básico, se ocupa de la capacidad de comparar cardinales de conjuntos de objetos. La capacidad de contar generalmente implica conjuntos bastante pequeños. Cuando evaluamos conjuntos más grandes, nos involucramos en operaciones más complejas de estimación, redondeo y aplicación de órdenes de magnitud. El conteo está muy relacionado con otra operación fundamental, la de clasificar, donde emerge el aspecto ordinal de los números. Cuantificar atributos de objetos (medición), o relaciones, situaciones y entidades en el mundo es una de las formas más básicas de conceptualizar el mundo circundante (OCDE, 2017).

Lograr una comprensión del número, los sistemas numéricos y sus propiedades algebraicas incluye el concepto básico de número, conjuntos numéricos (por ejemplo, números naturales, enteros, racionales, reales), la aritmética de los números y las propiedades algebraicas que cumplen las estructuras numéricas. Para utilizar la cuantificación de manera eficiente, es necesario poder trabajar no solo con números, sino también las estructuras numéricas. Los números en sí mismos tienen una relevancia relativa; lo que los convierte en una herramienta poderosa son las operaciones que podemos realizar con ellos y las propiedades que estas cumplen. Como tal, una buena comprensión de las operaciones definidas en los conjuntos numéricos es base del razonamiento matemático.

También es importante entender cuestiones de representación (como símbolos que involucran números, puntos en una recta numérica, cantidades geométricas y símbolos especiales como π , por

ejemplo) y cómo trabajar con ellas y sus equivalencias; las formas en que estas representaciones se ven afectadas por los sistemas numéricos; las formas en que las propiedades algebraicas de estos sistemas son relevantes para operar; y el significado de las operaciones y sus propiedades. En particular, los principios algebraicos que sustentan el sistema de valor posicional, lo que permite la expresión simbólica de números y enfoques eficientes para las operaciones.

Es innegable la centralidad del número como concepto clave en todas las áreas de la Matemática y en el razonamiento matemático mismo. La comprensión de los principios y propiedades algebraicas, experimentados por primera vez a través del trabajo con números, es fundamental para la comprensión por parte de los estudiantes de los conceptos del álgebra de la educación media, junto con la capacidad de manipular expresiones algebraicas, necesarias para resolver ecuaciones, establecer modelos, graficar funciones, programar y trabajar con fórmulas de hojas de cálculo. Además, en el mundo actual de uso intensivo de datos, la facilidad para la interpretación de patrones de números, la comparación de patrones y otras habilidades numéricas han adquirido importancia. Una amplia comprensión de los sistemas numéricos y cuantitativos respalda el razonamiento en las aplicaciones de la Matemática en el mundo previstas por este marco.

Valorar el poder de la abstracción y la representación simbólica

Las ideas fundamentales de la Matemática han surgido de la experiencia humana en el mundo y la necesidad de proporcionar coherencia, orden y previsibilidad a esa experiencia. Muchos objetos matemáticos modelizan la realidad, o al menos reflejan aspectos de ella. Sin embargo, la esencia de la abstracción en Matemática es que es un sistema autónomo, y los objetos matemáticos obtienen su significado dentro de ese sistema. La abstracción implica la atención deliberada y selectiva a las similitudes estructurales entre los objetos matemáticos y la construcción de relaciones entre esos objetos basándose en estas similitudes. En la matemática escolar, la abstracción forma relaciones entre objetos concretos, representaciones simbólicas y operaciones, incluidos los algoritmos y modelos mentales. Esta capacidad también juega un papel en el trabajo con dispositivos computacionales. La capacidad de manipular, dibujar y crear significado al trabajar con abstracciones en contextos tecnológicos en una importante habilidad de pensamiento computacional.

Por ejemplo, los niños comienzan a desarrollar el concepto de “circunferencia” al experimentar objetos específicos que los llevan a una comprensión informal de los círculos como “redondos”. Podrían dibujar circunferencias para representar estos objetos, notando similitudes entre los dibujos para generalizar sobre lo “redondo”, aunque las circunferencias sean de diferentes tamaños. “Circunferencia” se convierte en un objeto matemático abstracto cuando los estudiantes comienzan a “usar” circunferencias como objetos en su trabajo y más formalmente cuando se define como el lugar geométrico de puntos de un plano equidistantes de un punto fijo del mismo.

Los estudiantes usan representaciones, ya sean basadas en texto, simbólicas, gráficas, numéricas, geométricas o en código de programación, para organizar y comunicar su pensamiento matemático. Las representaciones nos permiten presentar ideas matemáticas de manera sucinta que, a su vez, conducen a algoritmos eficientes. Las representaciones también son un elemento central de la modelización matemática, lo que permite a los estudiantes abstraer una formulación simplificada o idealizada de un problema del mundo. Estas estructuras también son importantes para interpretar y definir el comportamiento de los dispositivos computacionales.

Valorar la abstracción y la representación simbólica favorece el razonamiento en las aplicaciones de la Matemática en situaciones del mundo contempladas por este marco, al promover que los estudiantes pasen de los detalles específicos de una situación a las características más generales y a describirlas de manera eficiente.

Visualizar estructuras matemáticas y sus regularidades

Al presentar a los estudiantes de primaria esta expresión: $5 + (3 + 8)$, algunos de ellos ven una cadena de símbolos que indican que se debe realizar un cálculo en un cierto orden de acuerdo con las reglas de prioridad de las operaciones mientras que otros ven un número agregado a la suma de otros dos números. El último grupo está viendo estructura; y por eso no es necesario que se les informe sobre el orden de operación, porque si desea agregar un número a una suma, primero deberá calcular la suma.

Ver la estructura sigue siendo importante a medida que los estudiantes avanzan a grados superiores. Un estudiante que ve: $f(x) = 5 + (x - 3)^2$ y dice que $f(x)$ es la suma de 5 y un cuadrado que es cero cuando $x = 3$, entiende que el mínimo valor que toma f es 5. Esto establece la base del pensamiento funcional.

La estructura está íntimamente relacionada con la representación simbólica. El uso de símbolos es poderoso, pero solo si retienen significado para el que usa el símbolo, en lugar de convertirse en objetos sin significado para reorganizarlos en una página. Ver la estructura es una forma de encontrar y recordar el significado de una representación abstracta. Estas estructuras también son importantes para interpretar y definir el comportamiento de los dispositivos computacionales. Ser capaz de ver la estructura es una ayuda conceptual importante para el conocimiento procedimental.

Los ejemplos anteriores ilustran que ver la estructura en objetos matemáticos abstractos es una forma de reemplazar las reglas de análisis sintáctico, que puede realizar una computadora, con imágenes conceptuales de esos objetos, que aclaran sus propiedades. Un objeto mantenido en la mente de esa manera está sujeto a un razonamiento a un nivel superior al de la simple manipulación simbólica.

Un sentido robusto de la estructura matemática también es compatible con la modelización. Cuando los objetos en estudio no son objetos matemáticos abstractos, sino más bien objetos del mundo real para ser modelados matemáticamente, la estructura matemática puede guiar el modelado. Los estudiantes también pueden imponer una estructura a los objetos no matemáticos para que estén sujetos a análisis matemático. Para calcular el área de una forma irregular es posible aproximarla mediante formas más simples cuyas áreas se conocen. Un patrón geométrico puede entenderse planteando la hipótesis de transformaciones como la traslación, rotación o simetría y extendiendo de manera abstracta el patrón a todo el espacio. El análisis estadístico a menudo consiste en imponer una estructura a un conjunto de datos, por ejemplo, asumiendo que proviene de una distribución normal o suponiendo que una variable es una función lineal de otra, pero medida con un error de distribución normal.

Ser capaz de visualizar las estructuras matemáticas favorece el razonamiento en las aplicaciones de la Matemática a las situaciones del mundo previstas por este marco al permitir a los estudiantes aplicar el conocimiento sobre situaciones o problemas en un contexto a problemas en otro contexto que comparten una estructura similar.

Reconocer relaciones funcionales entre cantidades

Los estudiantes en educación básica enfrentan problemas en los que deben calcular cantidades específicas. Por ejemplo, para la pregunta ¿a qué velocidad hay que viajar en auto para llegar de tu casa a un lugar a 180 km de distancia en 1 hora y 40 minutos? Estos problemas tienen una respuesta específica: conduciendo a 180 km en 1 hora y 40 minutos, la velocidad debe ser de 108 km por hora.

En algún momento, las propuestas a los estudiantes se encuadran en situaciones en las que las cantidades son variables, en las que pueden tomar un rango de valores. Por ejemplo, ¿cuál es la relación entre la distancia recorrida, d , en kilómetros, y el tiempo t , dedicado a manejar, en horas, si se conduce a una velocidad constante de 108 km por hora? Tales preguntas introducen relaciones funcionales. En este caso la relación, expresada por la ecuación $d = 108 t$, es una relación de proporcionalidad, un ejemplo fundamental y quizás el más importante para el conocimiento general.

Las relaciones entre cantidades se pueden expresar con ecuaciones, gráficos, tablas o descripciones verbales. Un paso importante en el aprendizaje es extraer de ellos la noción de función en sí misma, como un objeto abstracto del cual se usan esas representaciones. Los elementos esenciales del concepto son un dominio, del cual se seleccionan los valores iniciales de las variables, un codominio, en el que se encuentran los valores finales, y un proceso para producir esos valores funcionales a partir de valores iniciales.

El reconocimiento de las relaciones funcionales entre las variables en las aplicaciones de la Matemática en el mundo previstas por este marco favorece el razonamiento al permitir que los estudiantes se concentren en cómo la interdependencia y la interacción entre las variables impacta en la situación dada.

Usando la modelización matemática como una lente hacia el mundo

Los modelos son una representación de la conceptualización de fenómenos; son simplificaciones de la realidad que destacan ciertas características de un fenómeno mientras se aproximan o ignoran otras características. Como tal, “todos los modelos son incorrectos, pero algunos son útiles” (Box y Draper, 1987, p. 424). La utilidad de un modelo proviene de su poder explicativo y / o predictivo (Weintrop et al., 2016). Los modelos son, en ese sentido, abstracciones de la realidad. Un modelo puede presentar una conceptualización que se entiende como una aproximación o hipótesis de trabajo sobre el fenómeno o puede ser una simplificación intencionada. Los modelos matemáticos se formulan en lenguaje matemático y utilizan una amplia variedad de herramientas y resultados matemáticos (por ejemplo, de aritmética, álgebra, geometría, etc.). Como tales, se utilizan como formas de definir con precisión la conceptualización o teoría de un fenómeno, para analizar y evaluar datos (¿el modelo se ajusta a los datos?) y para hacer predicciones. Es posible hacer que se ejecuten en el tiempo o con diferentes datos de entrada, produciendo así simulaciones. Esta estrategia permite elaborar predicciones, estudiar consecuencias y evaluar la adecuación y precisión de los modelos al fenómeno de origen. Durante todo el proceso de modelización es necesario tomar conocimiento de los parámetros de la situación que le dio origen que impactan en el modelo así como de las soluciones desarrolladas utilizando el modelo.

Los modelos basados en computadora brindan la capacidad de probar hipótesis, generar datos, introducir aleatoriedad, etc. La competencia matemática incluye la capacidad de comprender, evaluar y extraer significado de modelos computacionales.

El uso de modelos en general y modelos matemáticos en particular favorece el razonamiento sobre las aplicaciones de la Matemática en el mundo contempladas en este marco al alentar a los estudiantes a centrarse en los elementos más significativos de las situaciones y, al hacerlo, reducir el problema a su esencia.

Entender la variación como el corazón de la estadística

En estadística cuantificar la variabilidad es uno de los elementos determinantes, y tal vez el central, en torno al cual se basa la disciplina. Al enfrentar este tipo de situaciones se ven casos en los que simplemente se ignora la variación y, como resultado, se sugieren generalizaciones radicales que a menudo son engañosas, si no erróneas y, como consecuencia, muy peligrosas. El sesgo en el sentido de las ciencias sociales generalmente se crea al no tener en cuenta las fuentes y magnitudes de la variabilidad en la característica en cuestión.

La estadística trata esencialmente de cuantificar o modelizar la variación y proporciona un entorno probabilístico en el que comprender diversos fenómenos de modo de facilitar la toma de decisiones, a veces críticas. La estadística es en muchos sentidos una búsqueda de patrones en un contexto de mucha variación; trata de encontrar una estimación lo más precisa posible de la realidad en medio de una gran cantidad de ruido aleatorio. Ese dato queda establecido en un contexto probabilístico, acompañado de una estimación del error contenido en el proceso. En última instancia, el que toma las decisiones en base al dato se enfrenta al dilema de no saber con certeza cuál es la realidad medida. La estimación que se ha desarrollado es, en el mejor de los casos, un rango de valores posibles; cuanto mejor es el proceso, por ejemplo, cuanto mayor es la muestra de datos, más estrecho es el rango de valores posibles, aunque no se puede evitar un rango.

Entender la variación como una característica central de la estadística favorece el razonamiento al aplicar Matemática en situaciones del mundo, tal como es contemplado en este marco, en el sentido de que se anima a los estudiantes a participar en argumentos basados en datos con conciencia de las limitaciones de las conclusiones que pueden extraerse.

Resolución de problemas

La definición de competencia matemática se refiere a la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar (y evaluar) la Matemática para resolver problemas. Estas tres palabras, *formular, emplear e interpretar*, proporcionan una estructura útil y significativa para organizar los procesos matemáticos que describen lo que hacen los individuos para conectar el contexto de un problema con la matemática asociada y resolver el problema. Los ítems de la prueba de Matemática en PISA 2022 se asignarán a razonamiento matemático o a uno de los tres procesos cognitivos:

- Formular situaciones matemáticamente;
- Emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemáticos;
- Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos.

Es importante que tanto los encargados de la formulación de políticas educativas como los que participan más estrechamente en la educación de los estudiantes a diario sepan en qué medida y con qué eficacia los estudiantes pueden participar en cada una de las etapas del modelo o ciclo de resolución de problemas. Formular situaciones matemáticamente apela la eficacia con la que los estudiantes son capaces de reconocer e identificar oportunidades para usar Matemática en situaciones problemáticas y

luego de proporcionar la estructura matemática necesaria para expresar ese problema contextualizado. Emplear en Matemática refiere a qué tan bien los estudiantes pueden realizar cálculos y manipulaciones y aplicar los conceptos y hechos que conocen para llegar a una solución matemática a un problema formulado matemáticamente. La interpretación y la evaluación de los resultados se relacionan con la eficacia con la que los estudiantes pueden reflexionar sobre las soluciones o conclusiones matemáticas obtenidas, interpretarlas en el contexto auténtico del problema y determinar si los resultados o conclusiones son razonables o útiles. La comprensión de la efectividad de los estudiantes en cada categoría puede ayudar a informar tanto las discusiones a nivel de políticas educativas como las decisiones que se toman más cerca del nivel del aula.

Además, alentar a los estudiantes a experimentar procesos de resolución de problemas matemáticos a través de herramientas y prácticas de pensamiento computacional alienta a los estudiantes a practicar habilidades de predicción, reflexión e identificación de errores (Brennan y Resnick, 2012).

Formular situaciones matemáticamente

La palabra formular en la definición de competencia matemática se refiere a que los individuos pueden reconocer e identificar oportunidades para usar Matemática y luego proporcionar una estructura matemática a un problema que se ha presentado en alguna forma contextualizada. En el proceso de formular situaciones matemáticamente los individuos determinan qué Matemática es útil para analizar, configurar y resolver el problema. Traducen desde un entorno del mundo al dominio de la Matemática y proporcionan al problema una estructura, representaciones y especificidad matemáticas. Razonan y dan sentido a las limitaciones y suposiciones del problema. Específicamente, este proceso de formular situaciones matemáticamente incluye actividades como las siguientes:

- seleccionar un modelo apropiado de una lista dada;
- identificar los aspectos matemáticos de un problema situado en un contexto del mundo e identificar las variables significativas;
- reconocer la estructura matemática (incluyendo regularidades, relaciones y patrones) en problemas o situaciones;
- simplificar una situación o problema para que sea susceptible de análisis matemático (por ejemplo, descomponiéndolo);
- identificar limitaciones y supuestos detrás de cualquier modelo matemático así como simplificaciones extraídas del contexto;
- representar una situación matemáticamente, usando variables, símbolos, diagramas y modelos estándar apropiados;
- representar un problema de una manera diferente, incluso organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos y hacer suposiciones adecuadas;
- comprender y explicar las relaciones entre el lenguaje específico del contexto de un problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para representarlo matemáticamente;
- traducir un problema a lenguaje matemático o a una representación;
- reconocer aspectos de un problema que se corresponden con problemas conocidos o conceptos, hechos o procedimientos matemáticos;
- elegir entre una serie de herramientas informáticas la más eficaz para representar una relación matemática inherente a un problema contextualizado y emplearla;
- crear una serie ordenada de instrucciones (paso a paso) para resolver un problema.

Emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemáticos

La palabra emplear en la definición de competencia matemática se refiere a que los individuos pueden aplicar conceptos, hechos, procedimientos y razonamientos matemáticos para resolver problemas formulados matemáticamente y así obtener conclusiones matemáticas. En este proceso los individuos ejecutan los procedimientos matemáticos necesarios para deducir y obtener resultados y encontrar una solución matemática (por ejemplo, realizan cálculos aritméticos, resuelven ecuaciones, hacen deducciones lógicas a partir de supuestos matemáticos, realizan manipulaciones simbólicas, extraen información matemática de tablas y gráficos, representan y manipulan formas en el espacio y analizan datos). Trabajan en un modelo del problema, establecen regularidades, identifican conexiones entre entidades matemáticas y crean argumentos matemáticos. Específicamente, este proceso de emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemáticos incluye actividades tales como:

- realizar un cálculo simple;
- sacar una conclusión simple;
- seleccionar una estrategia adecuada de una lista dada;
- diseñar e implementar estrategias para encontrar soluciones matemáticas;
- usar herramientas matemáticas, incluida la tecnología, como ayuda para encontrar soluciones exactas o aproximadas;
- aplicar hechos, reglas, algoritmos y estructuras matemáticas mientras obtiene soluciones;
- manipular números, datos e información gráfica y estadística, expresiones y ecuaciones algebraicas y representaciones geométricas;
- hacer diagramas matemáticos, gráficos, simulaciones y construcciones y extraer información matemática de ellos;
- usar y alternar entre diferentes representaciones en el proceso de obtener soluciones;
- hacer generalizaciones y conjeturas basadas en los resultados de aplicar procedimientos matemáticos para obtener soluciones;
- reflexionar sobre argumentos matemáticos y explicar y justificar resultados matemáticos; y
- evaluar la importancia de los patrones y las regularidades observadas (o propuestas) en los datos.

Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos

Interpretar y evaluar en la definición de competencia matemática refieren a la capacidad de los individuos para reflexionar sobre soluciones, resultados o conclusiones matemáticas e interpretarlos en el contexto del problema. Esto implica traducir las soluciones matemáticas o el razonamiento desarrollado al contexto del problema y determinar si los resultados son pertinentes y razonables y si tienen sentido en ese contexto. Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos abarca tanto “interpretar” como “evaluar” del ciclo de modelización matemática. Se puede pedir a los involucrados en esta etapa que construyan y comuniquen explicaciones y argumentos en el contexto del problema, reflexionando tanto sobre el proceso de modelización como sobre sus resultados. Específicamente, este proceso de interpretación, aplicación y evaluación de resultados matemáticos incluye actividades como:

- interpretar información presentada en forma gráfica o en diagramas;
- evaluar un resultado matemático en términos del contexto;
- interpretar un resultado matemático en el contexto del problema;
- evaluar la razonabilidad de una solución matemática en el contexto de un problema;
- comprender cómo el mundo impacta en los resultados y cálculos de un procedimiento o modelo matemático para poder hacer juicios contextuales sobre cómo se deben ajustar o aplicar esos resultados;

- explicar por qué un resultado o conclusión matemática tiene o no sentido, dado el contexto de un problema;
- comprender el alcance y los límites de los conceptos y las soluciones matemáticas;
- criticar e identificar los límites del modelo utilizado para resolver un problema; y
- usar el pensamiento matemático y el computacional para hacer predicciones, proporcionar evidencia de los argumentos dados, probar y comparar las soluciones propuestas.

Conocimiento del contenido matemático

La comprensión del contenido matemático y la capacidad de aplicar ese conocimiento para resolver problemas significativos y contextualizados es importante para los ciudadanos del mundo moderno. Es decir, para razonar matemáticamente, resolver problemas e interpretar situaciones en contextos personal, laboral, social o científico, es necesario recurrir a ciertos conocimientos matemáticos.

Dado que el objetivo de PISA es evaluar el nivel de desarrollo de la competencia matemática en los estudiantes se propone una estructura organizativa para el conocimiento del contenido matemático que se basa en los fenómenos matemáticos que subyacen a amplias clases de problemas⁵. Las categorías de conocimiento no son nuevas en el marco conceptual de las evaluaciones PISA. Cabe aclarar que aunque la categorización de los contenidos es importante para el desarrollo de las actividades y al seleccionar e informar los resultados de la evaluación, algunos ítems potencialmente podrían clasificarse en más de una categoría.

Las siguientes categorías de contenido (utilizadas en el marco para la evaluación PISA 2012) se utilizan nuevamente en PISA 2022 para reflejar tanto los fenómenos matemáticos que subyacen a clases amplias de problemas, la estructura general de la Matemática y las principales líneas de los planes de estudios escolares típicos. Estas cuatro categorías caracterizan la gama de contenido matemático que es fundamental en la disciplina e ilustran las amplias áreas de contenido utilizadas en los *ítems* de la evaluación en PISA 2022:

- Cambio y relaciones
- Espacio y forma
- Cantidad
- Incertidumbre y datos

Con estas cuatro categorías de contenido se puede asegurar una distribución de los ítems en el dominio y enfocar en fenómenos matemáticos importantes, mientras que al mismo tiempo, se evita una clasificación demasiado granular que impediría el análisis de problemas matemáticos ricos y desafiantes basados en situaciones auténticas. Las actividades propias a la edición PISA 2022, buscarán, al interior de estas categorías, hacer énfasis en ciertos puntos que, tanto por la evolución de la Matemática como por la posibilidad de que la prueba se aplique en computadora, pueden y deben ser profundizados. La definición de competencia matemática propuesta por PISA incluye explícitamente el uso de herramientas matemáticas. En esta ocasión, aparecen nuevos útiles al servicio de la resolución de problemas ya que por primera vez el estudiante tendrá a su disposición las potencialidades que ofrecen las computadoras en tanto que herramientas matemáticas.

⁵ Tal organización del contenido no es nueva, como lo ejemplifican dos publicaciones bien conocidas: *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (Steen, 1990) y *Mathematics: The Science of Patterns* (Devlin, 1994).

Si bien la categorización de los contenidos es importante para el desarrollo de actividades de prueba, para la selección y la presentación de informes de resultados de la evaluación, es importante señalar que algunos *ítems* podrían potencialmente clasificarse en más de una categoría de contenido.

Los planes nacionales de estudio para Matemática suelen estar organizados en torno a temas de contenido (en general: números, álgebra, funciones, geometría y manejo de datos) y listas que definen expectativas de logro. Estos planes de estudio están diseñados con el fin de equipar a los estudiantes con conocimientos y habilidades que abordan estos mismos fenómenos matemáticos subyacentes que organizan el contenido de la evaluación PISA.

Las categorías generales de contenido matemático y los temas de contenido más específicos, apropiados para estudiantes de 15 años descritos en esta sección reflejan el nivel y la amplitud del contenido que es elegible para su inclusión en la evaluación PISA 2022. Se proporcionan descripciones de cada categoría de contenido y la relevancia de cada una para razonar y resolver problemas significativos, seguidas de definiciones más específicas de los tipos de contenido que son apropiados para su inclusión en esta evaluación.

Se han identificado cuatro temas que requieren especial énfasis en la evaluación de PISA 2022 aunque no son nuevos en las categorías de contenido de Matemática. En el trabajo de Mahajan et al. (“PISA Mathematics 2021”, 2016) las cuatro *temáticas* se presentan no solo como situaciones comunes en la vida adulta en general, sino como los tipos de Matemática necesarios en las nuevas áreas emergentes de la economía como fabricación de tecnología, por ejemplo. Estas cuatro temáticas son: fenómenos de crecimiento, aproximaciones geométricas, simulaciones por computadora y toma de decisiones condicional. Estos temas deben abordarse en los ítems de la prueba de una manera que sea consistente con las experiencias de los jóvenes de 15 años. Cada tema se discute con la categoría de contenido correspondiente de la siguiente manera:

- Fenómenos de crecimiento (Cambio y relaciones)
- Aproximación geométrica (Espacio y forma)
- Simulaciones por computadora (Cantidad)
- Toma de decisiones condicional (Incertidumbre y datos)

Cambio y relaciones

En el mundo se presentan una multitud de relaciones temporales y permanentes entre objetos y circunstancias, donde ocurren cambios dentro de sistemas de objetos interrelacionados o en circunstancias donde los elementos se influyen entre sí. En muchos casos, estos cambios ocurren con el tiempo y, en otros casos, los cambios en un objeto o cantidad están relacionados con cambios en otro. Algunas de estas situaciones implican cambios discretos; otros cambian en un continuo. Algunas relaciones son de naturaleza permanente o invariable. Saber más sobre el cambio y las relaciones implica comprender los tipos fundamentales de cambio y reconocer cuándo ocurren para poder utilizar modelos matemáticos adecuados para describir y predecir ese cambio. Matemáticamente esto significa modelar el cambio y las relaciones con funciones y ecuaciones apropiadas, así como crear, interpretar y traducir entre representaciones de relaciones simbólicas y gráficas.

El cambio y las relaciones son evidentes en entornos tan diversos como el crecimiento de organismos, la música, los ciclos estacionales, los patrones climáticos, los niveles de empleo y las condiciones

económicas en una sociedad. Los aspectos del contenido matemático tradicional de las funciones y el álgebra, incluidas las expresiones algebraicas, las ecuaciones y desigualdades, las representaciones tabulares y gráficas, son fundamentales para describir, modelar, interpretar y predecir los fenómenos de cambio. Las herramientas computacionales proporcionan un medio dinámico para visualizar e interactuar con el cambio y las relaciones. Una habilidad importante de pensamiento computacional es la de reconocer cómo y cuándo un dispositivo computacional puede complementar conceptos matemáticos.

Las representaciones de datos y relaciones descritas mediante estadísticas también se utilizan para representar e interpretar cambios y relaciones, y una base firme en los conceptos básicos de números y unidades también es esencial para definirlos e interpretarlos. Algunas relaciones interesantes surgen de la medición geométrica, como las relaciones entre las longitudes de los lados de triángulos o la forma en que la variación en los perímetros de una familia de figuras puede relacionarse con la variación de sus respectivas áreas.

Fenómenos de crecimiento: comprender los peligros de las pandemias de gripe y los brotes bacterianos, así como el cambio climático, por ejemplo, exige que las personas piensen no solo en términos de relaciones lineales, sino que reconozcan que tales fenómenos responden a modelos no lineales (a menudo exponenciales o de otro tipo). Las relaciones lineales son comunes y fáciles de reconocer y comprender, pero asumir la linealidad puede ser peligroso. Un buen ejemplo de linealidad, probablemente utilizado por todos, es estimar la distancia recorrida en distintas cantidades de tiempo mientras se viaja a una velocidad determinada. Una aplicación de este tipo proporciona una estimación razonable, siempre que la velocidad se mantenga relativamente constante. Pero con las epidemias de gripe, por ejemplo, un enfoque tan lineal subestimaría enormemente el número de personas enfermas en los 5 días posteriores al brote inicial. Aquí es donde es fundamental una comprensión básica del crecimiento no lineal (incluido el cuadrático y el exponencial) y de la rapidez con que se pueden propagar las infecciones, dado que la tasa de cambio no es constante sino que aumenta día a día. La propagación de la infección por virus Zika es un ejemplo importante de crecimiento exponencial; reconocerlo como tal ayudó al personal médico a comprender la amenaza inherente y la necesidad de una acción rápida.

Identificar los fenómenos de crecimiento como un punto focal de la categoría de contenido de cambio y relaciones no indica que exista la expectativa de que los estudiantes participantes debieran haber estudiado la función exponencial y ciertamente responder a las preguntas de la prueba no requerirá ese conocimiento. Pero, la expectativa es que habrá ítems en los que se espera que los estudiantes (a) reconozcan que no todo el crecimiento es lineal, (b) que el crecimiento no lineal tiene implicaciones particulares y profundas sobre cómo entendemos ciertas situaciones, y (c) aprecien el significado intuitivo de crecimientos con tasa de crecimiento extremadamente rápida, por ejemplo, en la escala de terremotos, cada aumento de 1 unidad en la escala de Richter no significa un aumento proporcional de su efecto, sino 10, 100 y 1000 veces, etc.

Espacio y forma

Esta *área de contenido* abarca una amplia gama de fenómenos de nuestro mundo visual y físico: figuras, patrones, propiedades de los objetos, posiciones y orientaciones, representaciones de objetos, decodificación y codificación de información visual, navegación e interacción dinámica con formas reales así como con sus representaciones, el movimiento, el desplazamiento y la capacidad de anticipar acciones en el espacio. La geometría sirve como una base esencial para el área, pero la categoría se extiende más allá de la geometría tradicional en contenido, significado y método, basándose en elementos

de otras áreas de la Matemática como visualización espacial, medición y álgebra. Por ejemplo, las figuras pueden cambiar conservando propiedades o características y un punto puede “moverse” en su lugar geométrico, lo que involucra el concepto de función. Las fórmulas para la medición son fundamentales en esta área. En esta categoría de contenido se incluyen el reconocimiento, manipulación e interpretación de formas en entornos que requieren herramientas que van desde software de geometría dinámica hasta sistemas de posicionamiento global (GPS) y software de aprendizaje automático.

PISA asume que ciertas habilidades y la comprensión de un conjunto de conceptos básicos son importantes para la competencia matemática en relación con el espacio y la forma. La competencia matemática en esta *área* implica, ser capaz de resolver una serie de actividades como, por ejemplo, comprender la perspectiva, crear y leer mapas, transformar figuras con y sin tecnología, interpretar vistas de escenas tridimensionales desde varias perspectivas y construir representaciones de figuras, entre otras.

Modelos geométricos: en el mundo se presentan formas que no siguen los patrones típicos de uniformidad o simetría. Debido a que las fórmulas básicas para el cálculo de dimensiones no se ocupan de la irregularidad, para calcular el área o el volumen de las estructuras presentes suele ser necesario entender lo que vemos y relacionarlo con las figuras básicas. Por ejemplo, decidir sobre la cantidad de alfombras necesaria para un edificio en el que los ambientes presentan ángulos agudos y curvas estrechas exige un enfoque diferente al que se da con una habitación típicamente rectangular. La identificación de modelos geométricos como un foco de la categoría de contenido de espacio y forma indica la necesidad de que los estudiantes puedan usar su comprensión de los fenómenos del espacio tradicional en una variedad de situaciones.

Cantidad

La noción de cantidad puede ser el aspecto matemático más generalizado y esencial para la participación y el funcionamiento en nuestro mundo. Incorpora la cuantificación de atributos de objetos, relaciones, situaciones y entidades del mundo, entendiendo diversas representaciones de esas cuantificaciones y juzgando interpretaciones y argumentos basados en la cantidad. Comprometerse con la cuantificación implica comprender medidas, conteos, magnitudes, unidades, indicadores, tamaño relativo así como tendencias y patrones numéricos. Los aspectos del razonamiento cuantitativo, como el sentido numérico, las representaciones múltiples de un número, la elegancia en el cálculo, el cálculo mental, la estimación y evaluación de la pertinencia de los resultados, son la esencia de la competencia matemática en relación con la cantidad.

La cuantificación es un método primario para describir y medir un vasto conjunto de atributos de aspectos del mundo. Permite la modelización de situaciones, el análisis del cambio y las relaciones, la descripción y manipulación del espacio y la forma, la organización e interpretación de datos y la medición y evaluación de la incertidumbre. Por tanto, la competencia matemática en el área de la cantidad aplica el conocimiento de números y operaciones numéricas en una amplia variedad de entornos.

Simulaciones por computadora: tanto en Matemática como en Estadística hay problemas que no se abordan con tanta facilidad porque la Matemática requerida es compleja, o porque involucran una gran cantidad de factores y variables que operan todos en el mismo sistema. Actualmente, estos problemas se abordan cada vez más mediante simulaciones informáticas impulsadas por algoritmos. En el ejemplo ilustrativo de la actividad de prueba *Simulación de ahorros*, que se presenta más adelante, el estudiante utiliza una simulación por computadora como herramienta para la toma de decisiones. La simulación

por computadora hace los cálculos, dejando que el estudiante planifique, prediga y resuelva problemas en función de las variables que puede controlar.

Identificar las simulaciones por computadora como foco de esta categoría de contenido indica que, en el contexto de la evaluación de la competencia matemática basada en computadora de PISA hay una categoría amplia de problemas complejos que incluyen la presupuestación y la planificación, que los estudiantes analizarán en términos de las variables del problema, utilizando simulaciones por computadora proporcionadas como parte la actividad de prueba.

Incertidumbre y datos

En la ciencia, en la tecnología y en la vida cotidiana, la variación y la incertidumbre que viene asociada son un hecho. Es un fenómeno en el corazón de la teoría de la probabilidad y la estadística. La categoría de contenido incertidumbre y datos incluye reconocer el lugar de la variación en el mundo real, tener un sentido de la cuantificación de esa variación y reconocer su incertidumbre y error en las inferencias relacionadas. También incluye la formación, interpretación y evaluación de conclusiones extraídas en situaciones en las que existe incertidumbre. La presentación e interpretación de datos son conceptos clave en esta categoría (Moore, 1997).

Las predicciones económicas, los resultados de las encuestas y los pronósticos meteorológicos, por ejemplo, incluyen medidas de variación e incertidumbre. Existe la variación en los procesos de fabricación, los puntajes de las evaluaciones y los resultados de las encuestas, y el azar es fundamental para muchas actividades recreativas de las que disfrutan las personas. Las áreas curriculares tradicionales de probabilidad y estadística proporcionan medios formales para describir, modelizar e interpretar una determinada clase de fenómenos en los que la variación juega un papel central, y para hacer las correspondientes inferencias aleatorias. Además, el conocimiento de los números y de aspectos del álgebra, como los gráficos y la representación simbólica, contribuyen a participar en la resolución de problemas en esta categoría de contenido.

Toma de decisiones condicional: las estadísticas proporcionan una medida de la variación típica de gran parte de lo que las personas encuentran en su vida cotidiana. Esa medida es la varianza. Cuando hay más de una variable, existe variación en cada una de ellas así como co-variación que caracteriza las relaciones entre las variables. Estas interrelaciones a menudo se pueden representar en tablas de dos dimensiones que proporcionan la base para tomar decisiones condicionales (inferencias). En una tabla de dos dimensiones para dos variables dicotómicas (es decir, dos variables con dos posibilidades cada una), hay cuatro combinaciones posibles. La tabla de dos dimensiones (análisis de la situación) proporciona tres tipos de porcentajes que, a su vez, proporcionan estimaciones de las probabilidades correspondientes. Estos incluyen las probabilidades de los cuatro eventos conjuntos, los dos marginales y las probabilidades condicionales que juegan un papel central en lo que se ha denominado toma de decisiones condicional. La expectativa de los ítems de la prueba PISA es que los estudiantes puedan leer los datos relevantes de una tabla con una comprensión profunda del significado de esos datos.

En el ejemplo ilustrativo *Decisión de compra*, se le presenta al estudiante un resumen de las calificaciones de los clientes para un producto en una tienda en línea. Además, el estudiante recibe un análisis más detallado de las revisiones de los clientes que proporcionaron calificaciones de solo 1 o 2 estrellas. Este efecto establece una tabla de dos dimensiones y se le pide al estudiante que demuestre que comprende las diferentes estimaciones de probabilidad que proporciona la tabla.

La identificación de la toma de decisiones condicional como punto foco de la categoría de contenido de Incertidumbre y datos indica que espera que los estudiantes aprecien cómo la formulación del análisis en un modelo impacta en las conclusiones que pueden surgir y que diferentes supuestos o relaciones pueden generar diferentes conclusiones.

Contenidos para orientar la evaluación de la competencia matemática en estudiantes de 15 años

Comprender y resolver eficazmente problemas contextualizados que involucran contenidos disciplinares de las áreas: cambios y relaciones; espacio y forma; cantidad; e incertidumbre y datos requiere recurrir a una variedad de conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticos con cierto nivel de profundidad y sofisticación. Para la evaluación de la competencia matemática, PISA busca identificar los niveles y los aspectos de la Matemática que son apropiados para los estudiantes de 15 años en su trayectoria hacia ser ciudadanos del siglo XXI, constructivos, comprometidos y reflexivos, capaces de tomar decisiones y expresar juicios bien fundamentados. Además, aunque PISA no está diseñada ni tiene la intención de ser una evaluación basada en un plan de estudios, el estudio se esfuerza por reflejar la Matemática que los estudiantes probablemente hayan tenido la oportunidad de aprender en su escolaridad hasta los 15 años.

A continuación se describe el contenido que se consideró apropiado para su inclusión en la evaluación de la competencia matemática de los estudiantes de 15 años en PISA 2012 y que se mantiene para PISA 2022. Además, para este ciclo se han agregado a la lista cuatro contenidos adicionales. La lista resultante pretende ser ilustrativa de los temas de contenido incluidos en PISA 2022 y no una lista exhaustiva:

- **Fenómenos de crecimiento:** diferentes tipos de crecimiento lineal y no lineal
- **Geometría:** Tratamiento de características y propiedades de figuras y objetos irregulares o no familiares asociando estas figuras y objetos a otros *más familiares para los que existen fórmulas y herramientas* estándar y conocidas.
- **Simulaciones por computadora:** Exploración de situaciones (que pueden incluir supuestos, planificación, distribución de la población, propagación de enfermedades, probabilidad experimental, modelado del tiempo de reacción, etc.) en términos de las variables que inciden y el impacto que estas tienen en el resultado.
- **Toma de decisiones condicional:** Uso de principios básicos de combinatoria y comprensión de las interrelaciones entre variables para interpretar situaciones y hacer predicciones.
- **Funciones:** El concepto de función, enfatizando pero no limitado a funciones lineales, sus propiedades y una variedad de descripciones y representaciones de estas. Las representaciones comúnmente utilizadas son verbales, simbólicas, tabulares o gráficas.
- **Expresiones algebraicas:** La interpretación verbal y manipulación de expresiones algebraicas, que involucran números, símbolos, operaciones aritméticas, potencias y raíces simples.
- **Ecuaciones e inecuaciones:** Ecuaciones e inecuaciones lineales, ecuaciones sencillas de segundo grado y métodos de solución analíticos y no analíticos.
- **Sistemas de coordenadas:** Representación y descripción de datos, posición y relaciones.
- **Relaciones en y entre objetos geométricos en dos y tres dimensiones:** Las relaciones como conexiones algebraicas entre elementos de figuras (por ejemplo, el teorema de Pitágoras), posición relativa, semejanza, congruencia y relaciones dinámicas que implican transformación y movimiento de objetos, así como correspondencias entre objetos bidimensionales y tridimensionales.
- **Medición:** Cuantificación de características de y entre figuras y objetos, como amplitud de ángulos, distancias, longitud de segmentos y de circunferencias, superficies y capacidad.

- **Números y unidades:** conceptos, representaciones de números y sistemas numéricos (incluida la conversión entre sistemas numéricos), propiedades de los números enteros y racionales, así como las cantidades y unidades que se refieren a fenómenos como el tiempo, el dinero, la masa, la temperatura, la distancia, superficie, capacidad, cantidades derivadas y su descripción numérica.
- **Operaciones aritméticas:** La naturaleza y propiedades de estas operaciones y sus correspondientes convenciones de notación.
- **Porcentajes, razones y proporciones:** Descripción numérica de magnitud relativa y aplicación de proporciones y razonamiento proporcional para la resolución de problemas.
- **Principios de conteo:** combinaciones simples.
- **Estimación:** Aproximación, dirigida a un propósito, de cantidades y expresiones numéricas, incluyendo cifras significativas y redondeo.
- **Recolección, representación e interpretación de datos:** La naturaleza, origen y recolección de diversos tipos de datos y las diferentes formas de analizarlos, representarlos e interpretarlos.
- **Variabilidad de los datos y su descripción:** Conceptos como variabilidad, distribución y tendencia central de conjuntos de datos y formas de describirlos e interpretarlos en términos cuantitativos y gráficos.
- **Muestras y muestreo:** Conceptos de muestreo y poblaciones de datos, incluidas inferencias simples basadas en las propiedades de las muestras, abarcando los conceptos de exactitud y precisión.
- **Azar y probabilidad:** Noción de eventos aleatorios, variación aleatoria y su representación, azar y frecuencia de eventos, y aspectos básicos del concepto de probabilidad y probabilidad condicional.

Contextos de las actividades de la evaluación y habilidades seleccionadas del siglo XXI

La definición de competencia matemática introduce dos consideraciones importantes que se tienen en cuenta para el desarrollo de los *ítems* de evaluación en PISA. Primero, la definición deja en claro que la competencia matemática tiene lugar en contextos del mundo y de la vida. En segundo lugar, la competencia matemática ayuda a las personas a conocer el papel que desempeña la Matemática en el mundo así como a emitir juicios fundados y tomar decisiones que son necesarias para los ciudadanos del siglo XXI, constructivos, comprometidos y reflexivos. En esta sección se presenta de qué manera los contextos del mundo y las habilidades del siglo XXI impactan en el desarrollo de las actividades de la prueba.

La naturaleza de los contextos del mundo de la competencia matemática presenta ciertos retos para PISA. Los contextos del mundo real involucran información y esa información se comunica mediante textos. La información cuantitativa y estadística que fluye en el mundo y llega a los ciudadanos se comunica a través de textos escritos u orales, por ejemplo en artículos de los medios, comunicados de prensa, blogs, redes sociales, anuncios, etc. Este texto escrito u oral se utiliza para presentar mensajes o argumentos que pueden o no incluir números o gráficos. El texto es la herramienta principal para comunicar el contexto y de esto se deduce que la comprensión de texto es una habilidad fundamental y prerequisite para la competencia matemática. Por un lado, la evaluación debe presentar mensajes cuantitativos socialmente significativos utilizando textos ricos; por otro lado, la naturaleza comparativa de la evaluación, los muchos idiomas a los que se traduce y la amplia gama de niveles de comprensión del texto entre los participantes pone *límites a la riqueza del texto* que realmente se puede utilizar.

Contextos

Un aspecto importante de la competencia matemática es que la Matemática se utiliza para resolver problemas en contexto. El contexto es el aspecto del mundo de un individuo en el que se ubican los problemas. La elección de estrategias y representaciones matemáticas adecuadas a menudo depende del contexto en el que surge un problema y, por consecuencia, existe la necesidad de utilizar el conocimiento del contexto del mundo para desarrollar el modelo que permite resolver el problema. Para PISA, es importante que se utilice una amplia variedad de contextos porque se ofrece la posibilidad de conectarse con una gama amplia de intereses individuales y de situaciones en las que operan los individuos en el siglo XXI.

Contexto Personal - los problemas clasificados en esta categoría de contexto se centran en las actividades propias, de la familia o del grupo de compañeros. Los tipos de contextos que pueden considerarse personales incluyen (pero no se limitan) aquellos que involucran la preparación de alimentos, compras, juegos, salud personal, transporte personal, recreación, deportes, viajes, programación y finanzas personales.

Contexto Ocupacional - Los problemas clasificados en esta categoría de contexto se centran en el mundo del trabajo. Los *ítems* clasificados como ocupacionales pueden involucrar (pero no se limitan) cosas tales como medir, calcular el costo y pedir materiales para la construcción, cuestiones de nómina o contabilidad, control de calidad, programación o inventario, diseño o arquitectura y toma de decisiones relacionadas con el trabajo con o sin tecnología. Los contextos ocupacionales pueden relacionarse con cualquier nivel de la fuerza laboral, desde el trabajo no calificado hasta los niveles más altos de trabajo profesional, aunque los *ítems* de la prueba PISA deben ser accesibles para los estudiantes de 15 años.

Contexto Social - Los problemas clasificados en la categoría de contexto social se centran en la propia comunidad (ya sea local, nacional o mundial). Pueden involucrar (pero no se limitan a) cosas tales como sistemas de votación, transporte público, gobierno, políticas públicas, demografía, publicidad, salud, entretenimiento, estadísticas nacionales y economía. Aunque los individuos están involucrados en todas estas cosas de manera personal, en la categoría de contexto social, el foco de los problemas está en la perspectiva de la comunidad.

Contexto Científico - Los problemas clasificados en la categoría científica se relacionan con la aplicación de la Matemática al mundo natural y cuestiones y temas relacionados con la ciencia y la tecnología. Los contextos particulares pueden incluir (pero no se limitan a) áreas como el clima, la ecología, la medicina, la ciencia espacial, la genética, la medición y el mundo de la Matemática en sí. Los *ítems* que se sitúan en lo intramatemático, en los que todos los elementos involucrados pertenecen al mundo de la Matemática, pertenecen a este contexto.

Los *ítems* de la evaluación PISA se organizan en unidades que comparten el material de estímulo. Por tanto, suele darse el caso de que todos los *ítems* de la misma unidad pertenezcan a la misma categoría de contexto. Pero hay excepciones, por ejemplo, el material de estímulo puede enfocarse desde un punto de vista personal en un *ítem* y desde un punto de vista social en otro.

El uso de estas categorías de contexto proporciona la base para seleccionar una combinación de contextos para los *ítems* y asegura que la evaluación refleje una amplia gama de usos de la Matemática,

que van desde los usos personales cotidianos hasta las demandas científicas de los problemas globales. Además, es importante que cada categoría de contexto se cubra con *ítems* de evaluación que recorran un amplio rango de dificultad. Dado que el propósito principal de estas categorías de contexto es desafiar a los estudiantes en una amplia gama de problemas, cada categoría debería contribuir sustancialmente a la evaluación de la competencia matemática. Por último, no debería darse el caso de que el nivel de dificultad de los *ítems* de evaluación que representan una categoría de contexto sea sistemáticamente más alto o más bajo que el nivel de dificultad de los elementos de evaluación en otra categoría.

Al identificar contextos que pueden ser relevantes para el objetivo de esta evaluación, es fundamental tener en cuenta que uno de los propósitos de la evaluación es valorar el uso del conocimiento de contenido matemático y las habilidades que los estudiantes han desarrollado a los 15 años. Los contextos para los *ítems* de evaluación, por lo tanto, son seleccionados a la luz de su relevancia para los intereses y la vida de los estudiantes y las demandas que la sociedad impone a ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. Los equipos técnicos nacionales de los países que participan en la evaluación PISA están involucrados en juzgar el grado de tal relevancia.

Habilidades del siglo XXI

Existe un interés general por las denominadas competencias del siglo XXI y su consideración dentro de los sistemas educativos. La OCDE ha publicado un trabajo que se centra en estas habilidades y ha patrocinado un proyecto de investigación titulado *El futuro de la educación y las habilidades: un marco de la OCDE 2030*⁶, en el que unos 25 países participan en un estudio transnacional del currículo que incluye la incorporación de estas habilidades. El proyecto tiene como enfoque central identificar cómo podría ser el plan de estudios en el futuro, centrándose inicialmente en Matemática y Educación física.

Durante los últimos 15 años, aproximadamente, varias publicaciones han tratado de aportar claridad al debate y a la consideración de las competencias del siglo XXI. En *PISA 2021 Mathematics: A Broadened Perspective*⁷ se ofrece un resumen de informes clave al respecto y una conceptualización de las habilidades del siglo XXI. Después de un análisis cuidadoso de estas publicaciones, los autores concluyeron que es posible incorporar algunas de las llamadas habilidades del siglo XXI en los currículos de ciertas disciplinas específicas. Por ejemplo, en Matemática, será cada vez más importante que los estudiantes aprendan cómo presentar argumentos con la justificación adecuada al planear sus ideas. Los argumentos que presenten deben ser matemáticamente rigurosos, basados en una teoría sólida y lo suficientemente fuerte como para resistir críticas. Esto es parte de la competencia básica de emitir juicios independientes y bien fundados. En el contexto social, no basta con tener razón; hay que poder y estar dispuesto a presentar argumentos y defenderlos. Aprender Matemática, con fuerte énfasis en el razonamiento lógico y en el rigor disciplinar, en el nivel apropiado para la edad y grado educativo, es una oportunidad perfecta para practicar y desarrollar la capacidad en este tipo de argumentación.

De manera similar es fundamental equipar a los estudiantes con herramientas que puedan utilizar para no caer en falsedades e inferencias que pretenden basarse en el razonamiento matemático. Muy a menudo, un enunciado falso suele esconder alguna contradicción. La clase de Matemática es un ámbito ideal para desarrollar el estado de alerta de las mentes jóvenes hacia posibles contradicciones.

6 [https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20\(05.04.2018\).pdf](https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf)

7 https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA2021_Mathematics_StrategicDirectionPaper.pdf

El uso de la lógica de encontrar la intersección entre las habilidades genéricas del siglo XXI y las habilidades relacionadas pero a su vez específicas de la disciplina, que son una parte natural de la educación relacionada con ella, da como resultado las siguientes ocho habilidades del siglo XXI identificadas para su inclusión en el marco conceptual de evaluación de PISA 2022:

- Pensamiento crítico
- Creatividad
- Investigación
- Autorregulación, iniciativa y perseverancia
- Uso de la información
- Pensamiento sistémico
- Comunicación
- Reflexión

4. Evaluación de la competencia matemática

Esta sección describe el enfoque adoptado para implementar los elementos del marco conceptual descrito en secciones anteriores en la evaluación PISA 2022. Esto incluye la estructura del componente de Matemática de la evaluación PISA, la distribución deseada de puntajes para razonamiento matemático y resolución de problemas; la distribución de puntajes por área de contenido; una discusión sobre la variabilidad de las dificultades de los ítems; la estructura del instrumento de evaluación; el papel de la evaluación por computadora en Matemática; el diseño de los ítems de prueba; y el informe de los niveles de desarrollo de la competencia matemática.

Estructura de la evaluación en Matemática de PISA 2022

De acuerdo con la definición de competencia matemática, los ítems de evaluación utilizados en cualquier instrumento que se desarrolle como parte del estudio PISA se establecen dentro de un contexto. Los ítems involucran la aplicación de conceptos matemáticos, conocimientos y habilidades en el nivel apropiado para estudiantes de 15 años, como se describió anteriormente. El marco se utiliza para orientar la estructura y el contenido de la evaluación y, a su vez, es importante que el instrumento de prueba tenga un equilibrio adecuado de ítems que reflejen los componentes del marco de competencia matemática.

Distribución deseada de puntajes por razonamiento matemático y resolución de problemas

Los ítems de evaluación de la prueba de Matemática en PISA 2022 pueden asignarse al razonamiento matemático o a uno de los tres procesos matemáticos asociados con la resolución de problemas. El objetivo al construir la prueba es lograr un equilibrio que proporcione una ponderación aproximadamente igual entre los dos procesos que implican hacer una conexión entre el mundo real y el mundo matemático (formular e interpretar / evaluar) con razonar matemáticamente y el proceso de emplear. Esto requiere que los estudiantes sean capaces de trabajar en un problema formulado matemáticamente.

Tabla 1. **Distribución aproximada de puntajes por dominio para PISA 2022**

		Porcentaje de puntos en PISA 2022
Razonamiento matemático		Aproximadamente 25
Resolución de Problemas	Formular situaciones matemáticamente	Aproximadamente 25
	Emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemático	Aproximadamente 25
	Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos	Aproximadamente 25
Total		100

Distribución deseada de puntajes por categoría de contenido

Los ítems de Matemática de PISA se diseñan para reflejar el conocimiento del contenido matemático descrito en este marco. Los ítems de anclaje seleccionados para PISA 2022 se distribuyen en las cuatro categorías de contenido, como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. **Distribución aproximada de puntos por categoría de contenido para PISA 2022**

Categoría de contenido	Porcentaje de puntos en PISA 2022
Cambio y relaciones	Aproximadamente 25
Espacio y forma	Aproximadamente 25
Cantidad	Aproximadamente 25
Incertidumbre y datos	Aproximadamente 25
Total	100

Ítems en un variado rango de dificultad

La evaluación de competencia matemática PISA 2022 incluye ítems con una amplia gama de dificultades, en paralelo con la gama de habilidades de estudiantes de 15 años. También propone ítems que son un desafío para los estudiantes más capaces así como otros que son adecuados para los estudiantes con habilidades menos desarrolladas en Matemática. Desde una perspectiva psicométrica, una evaluación diseñada para evaluar grado de desarrollo de competencia de una cohorte particular de individuos es más efectiva y eficiente cuando la dificultad de los ítems de evaluación correlaciona con la habilidad de los sujetos evaluados. Además, las escalas de niveles de desempeños que se utilizan como parte central del informe de los resultados de PISA logran describir detalles sobre los desempeños de todos los estudiantes porque los ítems de los que se extrae la información recorren la gama de habilidades descritas.

La Tabla 3 describe la variedad de acciones que se espera que los estudiantes realicen al responder a las propuestas para evaluar el razonamiento matemático y cada uno de los procesos de resolución de problemas. Estas listas describen las acciones que los ítems demandan de los estudiantes. Para cada categoría hay una serie de ítems marcados con “***” para denotar las acciones que se esperan de los estudiantes que se desempeñarán en los niveles 1a, 1b y 1c, así como en el nivel 2 de la escala de niveles de desempeño. Los desarrolladores de actividades de prueba deben asegurarse de que haya ítems suficientes en el extremo inferior de la escala de desempeño para poder describir lo que los estudiantes de estos niveles de habilidad son capaces de realizar en la prueba.

Con el fin de obtener información útil para los nuevos niveles de la escala, 1b y 1c, es vital que el contexto y el lenguaje de las propuestas no interfieran con la comprensión de la Matemática que involucran. Con este fin, el contexto elegido y el lenguaje utilizado deben considerarse cuidadosamente. A la vez, los ítems deben ser interesantes para evitar la posibilidad de que los estudiantes simplemente no intenten responderlos porque no les motiva hacerlo.

El contexto de los ítems para los niveles 1b y 1c deben proponer situaciones familiares para los estudiantes. Ejemplos de estos contextos pueden incluir uso de dinero, temperatura, alimentación, hora, fecha, peso, tamaño y distancias. Además, todos los *ítems* deben ser concretos y no requerir pensamiento abstracto. La comprensión del contexto no debe interferir con el desempeño en el *ítem*.

Igualmente importante es tener todos los *ítems* formulados en los términos más simples posible. Los enunciados deben ser cortos y directos y debe evitarse enunciados compuestos y condicionales. El vocabulario utilizado debe examinarse cuidadosamente para garantizar que los alumnos comprendan claramente lo que se requiere. Además, se prestará especial atención para garantizar que no se agregue ninguna dificultad adicional debido a una gran carga de texto o por un contexto que no sea familiar para los estudiantes en función de su entorno socio cultural.

Los *ítems diseñados para el nivel 1c* solo deben requerir un solo paso para obtener la solución. Es importante señalar que un solo paso no implica que se limite a un paso aritmético. Este paso se puede realizar haciendo una selección o identificando alguna información relevante. Tanto el razonamiento matemático como todos los procesos de resolución de problemas deben estar presentes para poder evaluar el nivel de desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes que se desempeñan en los niveles 1b y 1c de la escala.

Tabla 3. **Acciones esperadas del estudiante para el razonamiento matemático y cada uno de los procesos de resolución de problemas⁸**

Razonamiento
** Deducir una conclusión simple
** Seleccionar una justificación apropiada
** Explicar por qué un resultado o conclusión matemática tiene o no tiene sentido dado el contexto de un problema
Representar un problema de una manera diferente a la dada, incluyendo organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos y hacer supuestos apropiados
Utilizar definiciones, reglas y sistemas formales, así como emplear algoritmos y pensamiento computacional al resolver un problema
Explicar y respaldar una justificación para la representación identificada o ideada de una situación auténtica del mundo
Explicar o respaldar una justificación de los procesos, procedimientos o simulaciones utilizados para determinar un resultado o solución matemática
Identificar los límites del modelo utilizado para resolver un problema
Comprender definiciones, reglas y sistemas formales, así como emplear algoritmos y razonamiento computacional
Proporcionar una justificación para la representación identificada o ideada de una situación auténtica del mundo
Proporcionar una justificación para los procesos y procedimientos utilizados para determinar un resultado o solución matemáticos
Reflexionar sobre argumentos matemáticos, explicando y justificando el resultado matemático
Criticar los límites del modelo utilizado para resolver un problema
Interpretar resultados matemáticos para explicar su significado en el contexto dado
Explicar las relaciones entre el lenguaje del contexto específico de un problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para representarlo matemáticamente
Reflexionar sobre argumentos matemáticos, explicando y justificando el resultado matemático
Reflexionar sobre soluciones matemáticas y crear explicaciones y argumentos que apoyen, refuten o califiquen la solución matemática a un problema contextualizado
Analizar similitudes y diferencias entre un modelo computacional y el problema matemático que está modelando
Explicar cómo funciona un algoritmo simple, detectar y corregir errores en algoritmos y programas

⁸ La Tabla 3 es una reformulación de la figura utilizada en presentaciones anteriores del marco conceptual para vincular procesos matemáticos con las habilidades matemáticas. Todos los ejemplos e ilustraciones de esa figura se incluyen en esta reformulación.

Formular	Emplear	Interpretar
** Seleccionar una descripción matemática o una representación que describe un problema	** Ejecutar un cálculo simple	** Interpretar un resultado matemático de nuevo en el contexto auténtico del problema
** Identificar las variables clave en un modelo	** Seleccionar una estrategia apropiada desde una lista	** Identificar si un resultado o conclusión matemática tiene o no sentido el contexto dado de un problema
** Seleccionar una representación adecuada al contexto del problema	** Implementar una estrategia dada para determinar una solución matemática	** Identificar los límites del modelo utilizado para resolver un problema
Leer, decodificar y dar sentido a enunciados, preguntas, tareas, objetos o imágenes para crear un modelo de la situación	** Elaborar diagramas matemáticos, gráficos, construcciones o artefactos de cálculo	Utilizar herramientas matemáticas o simulaciones por computadora para determinar la razonabilidad de una solución matemática y los límites y restricciones de esa solución, dado el contexto del problema.
Reconocer la estructura matemática (incluyendo regularidades, relaciones y patrones) en problemas o situaciones.	Comprender y utilizar construcciones basadas en definiciones, reglas y sistemas formales, incluyendo el uso de algoritmos familiares.	Interpretar resultados matemáticos en una variedad de formatos en relación con una situación o uso; comparar o evaluar dos o más representaciones en relación con una situación
Identificar y describir los aspectos matemáticos de una situación de un problema auténtico, incluyendo la identificación de las variables significativas	Desarrollar diagramas matemáticos, gráficos, construcciones o artefactos de cálculo y extraer información matemática de ellos.	Usar el conocimiento de cómo el mundo impacta los resultados y los cálculos de un procedimiento o modelo matemático para hacer juicios contextuales sobre cómo se deben ajustar o aplicar los resultados
Simplificar o descomponer una situación o problema para que sea susceptible de análisis matemático	Manipular números, gráficos, datos e información estadística, expresiones algebraicas, ecuaciones y representaciones geométricas	Construir y comunicar explicaciones y argumentos en el contexto del problema
Reconocer aspectos de un problema que se corresponden con problemas conocidos o conceptos, hechos o procedimientos matemáticos	Articular una solución, mostrando y/o resumiendo y presentando resultados matemáticos intermedios	Reconocer [demostrar, interpretar, explicar] el alcance y los límites de los conceptos matemáticos y de soluciones matemáticas

Traducir un problema a una representación o algoritmo matemático estándar	Utilizar herramientas matemáticas, que incluyen tecnología, simulaciones y pensamiento computacional, para ayudar a encontrar soluciones exactas o aproximadas	Comprender la relación entre el contexto del problema y la representación de la solución matemática. Utilizar este conocimiento para ayudar a interpretar la solución en contexto y evaluar la viabilidad y las posibles limitaciones de la solución
Usar herramientas matemáticas (usando variables, símbolos, diagramas apropiados) para describir las estructuras matemáticas y / o relaciones en un problema	Entender, relacionar y utilizar una variedad de representaciones al interactuar con un problema	
Aplicar herramientas matemáticas y de cálculo para representar relaciones matemáticas	Cambiar entre diferentes representaciones en el proceso de búsqueda de soluciones	
Identificar las restricciones y simplificaciones de supuestos en un modelo matemático	Utilizar un procedimiento de varios pasos que conduzca a una solución, conclusión o generalización matemática	
	Usar una comprensión del contexto para guiar o acelerar el proceso de solución matemática, por ejemplo, trabajar con un nivel de precisión apropiado al contexto	
	Hacer generalizaciones basadas en los resultados de aplicar procedimientos matemáticos para encontrar soluciones.	

Evaluación de Matemática basada en computadora

El modo principal de aplicación de PISA 2022 será la evaluación de la competencia matemática por computadora. La transición desde la aplicación en papel se concretó en los ciclos 2015 y 2018. Con el fin de mantener posible el análisis de las tendencias de los resultados en todos los estudios, tanto en el ciclo 2015 como 2018 el contenido de la prueba de Matemática no cambió a pesar de usar un modo de aplicación basado en computadora. La transición a un modelo por computadora en las tres áreas centrales de evaluación en 2022 brinda la oportunidad para desarrollar la evaluación de la competencia matemática mejor alineada a la naturaleza evolutiva de la Matemática en el mundo actual, al tiempo que se asegura no perder control de la tendencia hacia los ciclos anteriores. Estas oportunidades incluyen la incorporación de nuevos formatos de *ítems* (por ejemplo, arrastrar y soltar, listas desplegables, tablas dinámicas y simulaciones); presentar a los estudiantes datos auténticos del mundo (como grandes conjuntos

de datos ordenables); crear modelos matemáticos o simulaciones que los estudiantes puedan explorar manipulando los valores de las variables; ajuste de curvas y uso de la curva de mejor ajuste para realizar predicciones. Además de una gama más amplia de tipos de preguntas y oportunidades matemáticas que ofrece la computadora, también permite una evaluación de tipo adaptativa.

La capacidad de la evaluación adaptativa por computadora, que se implementó previamente en la evaluación de la competencia en Lectura de PISA 2018, brinda la oportunidad de describir mejor qué es lo que los estudiantes en ambos extremos del rango de habilidades muestran ser capaces de hacer. Al proporcionar a los estudiantes combinaciones de actividades de prueba cada vez más individualizadas y seleccionadas en base a sus propias respuestas y puntajes en las primeras preguntas a las que responden, se genera información cada vez más detallada sobre las características de desempeño de los estudiantes en ambos extremos de la escala.

El uso de las potencialidades de la tecnología da como resultado ítems de evaluación que son más atractivos para los estudiantes en lo visual y a su vez facilitan la comprensión. Por ejemplo, a los estudiantes se les puede presentar un estímulo en movimiento, representaciones de objetos tridimensionales que se pueden rotar o con un acceso más flexible a la información relevante. Los nuevos formatos de ítems, como los que permiten que los estudiantes “arrastren y suelten” información o utilicen “puntos de acceso” en una imagen, están diseñados para promover el compromiso de los estudiantes, ofrecen presentaciones usuales para ellos y permiten una gama más amplia de tipos de respuesta con lo que brindan una imagen más completa de la competencia matemática. Un desafío clave es garantizar que estos ítems continúen evaluando la competencia matemática y que la interferencia de las dimensiones irrelevantes del dominio se mantenga al mínimo.

Las investigaciones muestran que las demandas matemáticas en el mundo del trabajo ocurren cada vez más en presencia de la tecnología electrónica, de modo que la competencia matemática y el uso de la computadora combinan (Hoyles et al., 2002). Un desafío clave es distinguir las demandas matemáticas de un ítem basado en computadora de PISA de las demandas no relacionadas con la competencia matemática, como las que exige la tecnología de la información y las comunicaciones (TIC) y el formato de presentación del ítem. Responder ítems de PISA en una computadora en lugar de en papel enfrenta al estudio a la realidad y a las exigencias del siglo XXI.

Las preguntas que parecen muy adecuadas para el formato por computadora y responden a la naturaleza evolutiva de la competencia matemática incluyen:

- Simulación en la que se ha establecido un modelo matemático y los estudiantes pueden manipular los valores de las variables para explorar su impacto en crear “una solución óptima”.
- Ajustar una curva (seleccionando una curva de un conjunto limitado de curvas proporcionadas) a un conjunto de datos o a una imagen geométrica para determinar el “mejor ajuste” y usar esa curva de mejor ajuste para brindar la respuesta a una pregunta sobre la situación.
- Situaciones presupuestarias (por ejemplo, de una tienda online) en las que el alumno debe seleccionar combinaciones de productos para cumplir con una serie de objetivos dentro de un presupuesto determinado.
- Simulación de compra en la que el estudiante selecciona entre diferentes préstamos y asocia opciones de pago para comprar un artículo con un préstamo y cumpliendo con un presupuesto. El desafío del problema es comprender cómo interactúan las variables participantes.
- Problemas que incluyen codificación visual para lograr una determinada secuencia de acciones.

A pesar de las oportunidades que presenta el modo por computadora (descritas anteriormente), es importante que la evaluación se siga centrado en valorar la competencia matemática y no cambie a la evaluación de las competencias en TIC. Es importante que las simulaciones y otras características de los tipos de preguntas descritas anteriormente no tengan tanto peso que oculten el razonamiento matemático y los procesos de resolución de problemas.

El modo de aplicación por computadora también debe conservar algunas de las características de la versión en papel, por ejemplo, la capacidad de volver a examinar los ítems que ya se han intentado, aunque en el contexto de las pruebas adaptativas, esto necesariamente se limitará a las preguntas que componen la unidad en la que el estudiante está trabajando.

Diseño de los ítems de Matemática en PISA 2022

Se utilizan tres tipos básicos de formato de ítem para evaluar la competencia matemática en PISA 2022: ítems de respuesta abierta construida, de respuesta cerrada (restringida) construida y de respuesta de selección (múltiple opción).

- Los ítems de respuesta abierta construida requieren una respuesta escrita, algo extendida, elaborada por parte del estudiante. En estos ítems es usual que se pida al estudiante que muestre los pasos dados o que explique cómo llegó a la respuesta. Estos ítems requieren personal experto, capacitado para codificar manualmente las respuestas que brindan los estudiantes. Para facilitar la función de evaluación adaptativa será necesario minimizar la cantidad de ítems que dependen de expertos para codificar las respuestas de los estudiantes. Esto se debe a que el algoritmo del modelo adaptativo necesita los puntajes otorgados a las respuestas que dan los alumnos para decidir qué pregunta ofrecer al estudiante a continuación.
- Los ítems cerrados de respuesta construida proporcionan un entorno más estructurado para presentar soluciones a los problemas y producen una respuesta del estudiante que se puede juzgar fácilmente como correcta o incorrecta en forma automática. Las respuestas construidas de tipo restringida que se utilizan con más frecuencia son las que se dan solo con números.
- Los ítems de respuesta de selección requieren la elección por parte del estudiante de una o más respuestas entre varias opciones de respuesta dadas. Las respuestas a estas preguntas generalmente se pueden procesar automáticamente.

Aproximadamente, el mismo número de cada uno de estos tres tipos de formato de *ítems* conforma la prueba.

La evaluación de la competencia matemática en PISA se basa entonces en unidades de evaluación que comprenden material de estímulo escrito en un texto y otra información presentada en tablas, cuadros, gráficos o diagramas, además de uno o más *ítems* que están vinculados a este material de estímulo común para todos. Este formato brinda a los estudiantes la oportunidad de involucrarse en un contexto o problema respondiendo a una serie de *ítems* relacionados a ese contexto.

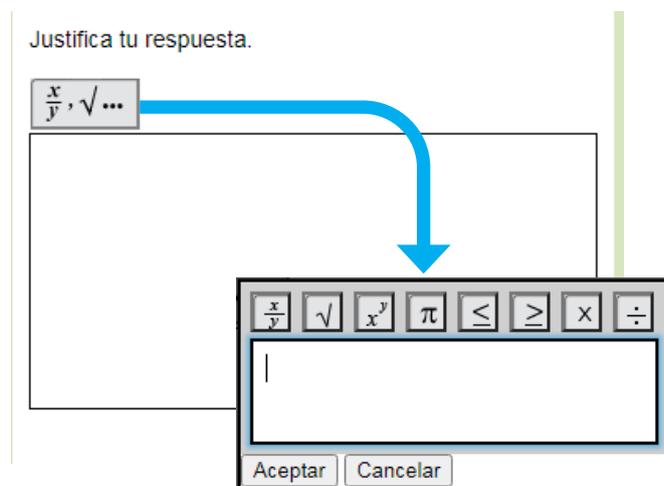
Como se ha dicho, los *ítems* seleccionados para su inclusión en la prueba PISA recorren un amplio rango de dificultades, con el fin de concordar con la amplia gama de habilidades de los estudiantes que participan en la evaluación. Además, todas las categorías principales de la evaluación (las categorías de contenido; el razonamiento matemático y las categorías del proceso de resolución de problemas y las diferentes categorías de contexto y habilidades del siglo XXI) están representadas, en la medida de lo

posible, con ítems de una amplia gama de dificultades. Las dificultades de los ítems se establecen como una de varias propiedades de medición en una extensa prueba piloto antes de la selección de ítems para el estudio principal de PISA. Los *ítems* se seleccionan para su inclusión definitiva en los instrumentos del estudio principal según su ajuste con las categorías del marco y sus propiedades de psicométricas.

Además, el nivel de lectura requerido para involucrarse con éxito con un ítem se considera cuidadosamente en el desarrollo y selección de ítems. Un objetivo en el desarrollo de *ítems* es lograr que la expresión en los textos sea lo más simple y directa posible. También se evita plantear contextos que podrían presentar un sesgo cultural y todas las propuestas se verifican con los equipos técnicos nacionales. La traducción de los *ítems* a los diferentes idiomas en los que se aplica PISA se realiza mediante un cuidadoso proceso en etapas que asegura su calidad lingüística⁹.

Para evaluar la competencia matemática, la plataforma de la prueba en PISA 2022 incluye una herramienta para que los estudiantes digiten sus respuestas a las preguntas de respuesta construida y muestren su trabajo según sea necesario. La herramienta permite a los estudiantes ingresar texto y números, podrán ingresar una fracción, raíz cuadrada o exponentes así como *símbolos adicionales como π* y los símbolos de la relación de orden “menor que” o “mayor que”, al igual que los signos de las operaciones básicas. En la Figura 3 se muestra un ejemplo de la pantalla del editor.

Figura 3. **Ejemplo de la herramienta de edición en PISA 2022**



Otra de las herramientas a disposición de los estudiantes es una calculadora científica básica que se programará para respetar el orden estándar de las operaciones.

Los estudiantes de los países que aplicarán la evaluación en formato papel tienen acceso a una calculadora portátil aprobada por sus respectivos sistemas educativos.

⁹ La OCDE produce los materiales originales de PISA en inglés y francés y los países traducen al idioma o idiomas con los que van a presentar los instrumentos a los estudiantes. Esta traducción es sometida a una verificación para asegurar la equivalencia entre idiomas y la comparabilidad posterior de los resultados. Desde 2015 los países hispanohablantes que participan en PISA lograron contar con una versión base en español producida centralmente que luego solo adaptan a sus modismos nacionales. Esta versión también se verifica centralmente.

Codificación de las respuestas dadas a los ítems

Aunque la mayoría de los ítems se codifican de manera dicotómica (es decir, las respuestas reciben crédito o no reciben crédito), los ítems abiertos de respuesta construida pueden implicar una codificación de crédito parcial, lo que permite que se asigne crédito a las respuestas de acuerdo con diferentes grados de acierto y hasta qué punto el estudiante se ha involucrado con un ítem. Está prevista la necesidad de crédito parcial para codificar las respuestas a los ítems de razonamiento matemático que rara vez involucrarán la producción de una respuesta de un solo número, sino que exigen respuestas con uno o más elementos presentes.

Informar sobre el dominio matemático

Los resultados de la prueba de Matemática de PISA se informan de varias maneras. Se obtienen estimaciones de competencia matemática general para los estudiantes de la muestra en cada país participante, y se definen varios niveles de desempeño. También se desarrollan descripciones del grado de competencia matemática típico de los estudiantes en cada nivel de desempeño. En PISA 2022, los seis niveles de competencia informados en ciclos anteriores se ampliarán de la siguiente manera: el Nivel 1 pasará a llamarse Nivel 1a, y la tabla que describe las competencias se ampliará para incluir los Niveles 1b y 1c. Estos niveles adicionales se han agregado para proporcionar un mayor detalle en la descripción de los desempeños que se ubican en el extremo inferior de la escala de competencia.

Además de la escala general de desempeños en Matemática, se describirán escalas de competencia adicionales a partir de los resultados de la prueba. Estas escalas adicionales brindan información sobre el razonamiento matemático y sobre los tres procesos de resolución de problemas matemáticos: *formular situaciones matemáticamente; emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemáticos; e interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos.*

5. Competencia matemática y los cuestionarios de factores asociados a los desempeños

Desde el primer ciclo de PISA, los cuestionarios del contexto escolar y de estudiante han tenido dos propósitos interrelacionados al servicio del objetivo más amplio de evaluar los sistemas educativos: primero, los cuestionarios proporcionan un contexto a través del cual interpretar los resultados de PISA tanto dentro como entre los sistemas educativos. En segundo lugar, los cuestionarios tienen como objetivo proporcionar una medición confiable y válida de indicadores educativos adicionales, que pueden informar por sí mismos las políticas educativas y la investigación.

Dado que la competencia matemática es el dominio principal en la edición de 2022, se espera que los cuestionarios de factores asociados proporcionen no solo datos de tendencias para los constructos que continúan siendo evaluados, sino que además proporcionen información valiosa sobre las innovaciones en el marco de competencia matemática para PISA 2022. En particular, se espera que la competencia matemática ocupe un lugar destacado en el análisis de los constructos contextuales específicos del dominio, así como en una serie de diferentes categorías de enfoque de políticas que van desde variables de nivel individual, como características demográficas y sociales y emocionales, hasta prácticas escolares, políticas e infraestructura (OCDE, 2018).

Se identificaron dos áreas amplias en las actitudes de los estudiantes hacia la Matemática que los predisponen a una participación productiva en esta área, como complemento de la evaluación en Matemática de PISA 2012. Estos fueron el interés de los estudiantes en la Matemática y su voluntad de participar en actividades relacionadas con ellas. Estas líneas seguirán siendo un tema central de los cuestionarios en 2022.

El interés por la Matemática tiene componentes relacionados con la actividad presente y futura. Las preguntas relevantes se centran en el interés de los estudiantes por la Matemática en el centro educativo, si las ven útiles en la vida real, así como sus intenciones de seguir estudios adicionales en Matemática y participar en carreras orientadas a ellas. Existe una preocupación internacional sobre esta área, porque en muchos países participantes hay una disminución en el porcentaje de estudiantes que eligen estudios futuros relacionados con la Matemática, mientras que al mismo tiempo existe una creciente necesidad de graduados de estas áreas.

La disposición de los estudiantes para hacer Matemática se refiere a las actitudes, emociones y creencias relacionadas con ellos mismos que los predisponen a beneficiarse, o que les impiden beneficiarse, con el desarrollo de la competencia matemática que han alcanzado. Los estudiantes que disfrutaban de la actividad matemática y se sienten seguros para emprenderla, son más propensos a usar la Matemática para pensar en las situaciones que encuentran en los diferentes aspectos de sus vidas, dentro y fuera del centro educativo. Los constructos de la prueba PISA que son relevantes para esta área incluyen las emociones de disfrute, confianza y ansiedad matemática, y las creencias auto relacionadas de autoconcepto y autoeficacia.

Un análisis del progreso posterior de los jóvenes australianos que mostraron bajos desempeños en PISA a los 15 años encontró que aquellos que “reconocen el valor de la Matemática para su éxito futuro

tienen más probabilidades de lograr este éxito, y eso incluye ser felices con muchos aspectos de su vida personal, así como su futuro y sus carreras” (Hillman y Thomson, 2010, p. 31). El estudio recomienda que un enfoque en las aplicaciones prácticas de la Matemática en la vida cotidiana puede ayudar a mejorar la perspectiva de estos estudiantes de bajo desempeño.

Las innovaciones en el marco para la evaluación de la competencia matemática en PISA 2022 apuntan al menos a cuatro áreas en las que los cuestionarios de factores asociados pueden proporcionar datos valiosos. Estas áreas son: *razonamiento matemático*; *pensamiento computacional* y el papel de la tecnología tanto en la práctica como en la enseñanza de la Matemática; las *cuatro áreas de contenido*; y las *habilidades del siglo XXI en el contexto de la Matemática*.

Razonamiento matemático

El marco para la evaluación en Matemática de PISA 2022 pone en primer plano el razonamiento matemático habilitado por algunos conocimientos clave que sustentan la Matemática escolar (comprender la cantidad, los sistemas numéricos y sus propiedades algebraicas; apreciar el poder de la abstracción y la representación simbólica; ver las estructuras matemáticas y sus regularidades; reconocer las relaciones funcionales entre cantidades; usar modelos matemáticos como una lente sobre el mundo real; y entender la variación como central en la estadística).

El enfoque en el razonamiento tiene implicancias para los cuestionarios de factores asociados que deberían proporcionar datos para comprender las oportunidades de los estudiantes para aprender a razonar matemáticamente y emplear los conocimientos clave que sustentan la Matemática escolar. En particular, los cuestionarios deben establecer la frecuencia con la que los estudiantes, por ejemplo:

- Identifican, reconocen, organizan, conectan y representan;
- Construyen, abstraen, evalúan, deducen, justifican, explican y argumentan;
- Interpretan, emiten juicios, critican, refutan y califican.

Además de establecer la frecuencia de las oportunidades (para aprender) para razonar, los cuestionarios deben brindar información acerca de qué formas adoptan estas oportunidades (verbales o escritas).

Por último, con respecto al razonamiento, los cuestionarios deben dar una idea de la voluntad de los estudiantes para persistir en tareas que involucran razonamiento.

En el caso de los profesores y la docencia, es necesario comprender mejor cómo ven el papel del razonamiento en la educación matemática en general y en sus prácticas de enseñanza y evaluación en particular.

Pensamiento computacional

Los aspectos del pensamiento computacional forman una dimensión en rápida evolución y crecimiento tanto de la Matemática como en la competencia matemática. El marco de competencia matemática de PISA 2022 ilustra cómo el pensamiento computacional es parte del hacer Matemática y a su vez tiene un impacto en hacer Matemática. Los valores y creencias sobre el aprendizaje y los módulos de mentalidad abierta de los cuestionarios de antecedentes pueden explorar la experiencia del estudiante sobre el papel del pensamiento computacional al hacer Matemática. Las innovaciones evidentes en el marco matemático de PISA 2022 apuntan a al menos cuatro áreas en las que los cuestionarios de ante-

cedentes pueden proporcionar datos valiosos. Estas áreas son: razonamiento matemático; pensamiento computacional y el papel de la tecnología tanto en la práctica como en la enseñanza de la Matemática; las cuatro áreas de contenido focal; y habilidades del siglo XXI en el contexto de la Matemática.

El marco para evaluar la competencia matemática en PISA 2022 llama la atención sobre las diferentes formas en que la tecnología está cambiando el mundo en el que vivimos y cambiando lo que significa participar en actividades matemáticas. Las preguntas clave para los cuestionarios de factores asociados incluyen el desarrollo de una comprensión profunda de varios aspectos. En primer lugar, cómo están cambiando las experiencias de los estudiantes con la Matemática y la práctica de la Matemática (si es que lo hacen) y, en segundo lugar, cómo está evolucionando la pedagogía en el aula debido al impacto que la tecnología tiene en la forma en que los estudiantes se involucran con la Matemática y con los dispositivos matemáticos y sobre lo que significa hacer Matemática. En el caso de los estudiantes, es de interés comprender mejor cómo la tecnología está afectando el desempeño de los estudiantes y las cuestiones pedagógicas podrían explorarse tanto en el tiempo de aprendizaje como en los módulos de currículo y prácticas de enseñanza.

El énfasis en el pensamiento computacional y el papel de la tecnología tanto en la práctica como en la enseñanza de la Matemática tiene implicaciones para los cuestionarios de factores asociados a los desempeños que deberían proporcionar datos para comprender mejor las oportunidades de los estudiantes para aprender en ese sentido. En particular, los cuestionarios deben establecer la frecuencia con la que los estudiantes, por ejemplo:

- Diseñan o trabajan con simulaciones por computadora o modelos por computadora;
- Codifican o programan tanto dentro como fuera de la clase de Matemática;
- Están expuestos a sistemas informáticos matemáticos (incluido software de geometría dinámica; hojas de cálculo; software de programación (por ejemplo, Logo y Scratch); calculadoras gráficas; juegos, etc.).

Cuatro áreas de contenido focal

En reconocimiento del mundo cambiante, el Marco para la evaluación de la competencia matemática de PISA 2022 presta especial atención a cuatro áreas de contenido:

- los fenómenos de crecimiento (dentro del cambio y las relaciones);
- la aproximación geométrica (dentro del espacio y la forma);
- las simulaciones por computadora (dentro de la cantidad);
- la toma de decisiones condicional (dentro de la incertidumbre y los datos).

El enfoque en estas áreas de contenido tiene consecuencias en los cuestionarios que deberían proporcionar datos para comprender mejor las oportunidades de los estudiantes para aprender a este respecto. En particular, los cuestionarios deben informar sobre la frecuencia con la que los estudiantes están expuestos a estos contenidos y las diferentes formas que toman esas oportunidades.

Habilidades del siglo XXI en el contexto matemático

El marco conceptual de evaluación de la competencia matemática en PISA 2022 introduce un conjunto particular de habilidades del siglo XXI como un resultado así como enfoque para la Matemática. Los cuestionarios podrían examinar de manera productiva si la educación en Matemática está contribuyendo o no al desarrollo de estas habilidades del siglo XXI y si las prácticas de enseñanza se centran en ellas.

En particular, el módulo de tiempo de aprendizaje y plan de estudios del cuestionario explora si estas habilidades aparecen o no en el plan de estudios propuesto.

Los resultados de la evaluación PISA 2022 proporcionarán información importante para los responsables de la formulación de políticas educativas en los países participantes sobre los resultados de la educación relacionados con los logros y con las actitudes de los estudiantes. Al combinar la información de la evaluación PISA sobre el grado de desarrollo de la competencia matemática con la información de los cuestionarios sobre actitudes, emociones y creencias que predisponen a los estudiantes a utilizar su competencia matemática, surgirá una imagen más nítida y completa de la situación actual.

6. Resumen

El marco conceptual de PISA 2022 para la evaluación del grado de desarrollo de la competencia matemática, al tiempo que mantiene la coherencia con los marcos de los ciclos anteriores, reconoce que el mundo está en constante cambio y, con ello, la demanda de ciudadanos con conocimientos matemáticos que razonen matemáticamente en lugar de reproducir las técnicas matemáticas como rutinas.

El objetivo de PISA con respecto a la competencia matemática es desarrollar indicadores que muestren la eficacia con la que los países están preparando a los estudiantes para utilizar las Matemática en el aspecto cotidiano de su vida personal, cívica y profesional, como ciudadanos del siglo XXI constructivos, comprometidos y reflexivos. Para lograr esto, PISA ha desarrollado una definición de competencia matemática y un marco de evaluación que refleja los componentes importantes de esta definición.

Los ítems de la evaluación en Matemática seleccionados para su inclusión en PISA 2022, basados en esta definición y marco, están destinados a reflejar un equilibrio entre el razonamiento matemático, los procesos de resolución de problemas, el contenido matemático y los contextos.

El diseño de la evaluación asegurará una medición válida de la habilidad en todo el rango de logros que se extiende a dos niveles por debajo de la escala PISA anterior, al tiempo que se preserva la calidad y el contenido de la evaluación.

El modo de evaluación por computadora que se utilizará a partir de 2022 proporciona problemas en una variedad de formatos, con diversos grados de orientación y estructura incorporadas, que mantienen un énfasis en problemas auténticos que requieren que los estudiantes razonen y demuestren su pensamiento.

7. Referencias

- Ananiadou, K. and M. Claro (2009), “21st Century Skills and Competences for New Millennium Learners in OECD Countries”, OECD Education Working Papers, No. 41, OECD Publishing, Paris, <http://dx.doi.org/10.1787/218525261154>.
- Basu, S. et al. (2016), “Identifying middle school students’ challenges in computational thinking-based science learning”, Research and Practice in Technology Enhanced Learning, Vol. 11/3, <http://dx.doi.org/10.1186/s41039-016-0036-2>.
- Beheshti, E. et al. (2017), Computational Thinking in Practice: How STEM Professionals Use CT in Their Work, Northwestern University, San Antonio, Texas, <http://ccl.northwestern.edu/papers.shtml>.
- Beloit College (2017), The Beloit College Mindset List for the Class of 2021, <https://www.beloit.edu/mindset/2021/>.
- Benton, L. et al. (2017), “Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England”, Digital Experiences in Mathematics Education, Vol. 3, pp. 115-138, <http://dx.doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x>.
- Box, G. and N. Draper (1987), Empirical Model-Building and Response Surfaces, John Wiley.
- Brennan, K. and M. Resnick (2012), New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking, https://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA2012_CT.pdf.
- Devlin, K. (1994), Mathematics: The Science of Patterns : The Search for Order in Life, Mind, and the Universe, W H Freeman & Co.
- Fadel, C., M. Bialik and B. Trilling (2015), Four-Dimensional Education : The Competencies Learners Need to Succeed, CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Gadanidis, G. (2015), Coding for Young Mathematicians, Western University, London, Ontario, Canada, <http://worlddiscoveries.ca/technology/18155> (accessed on 5 April 2018).
- Gadanidis, G., E. Clements and C. Yiu (2018), “Group Theory, Computational Thinking, and Young Mathematicians”, Mathematical Thinking and Learning, Vol. 20/1, pp. 32-53, <http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2018.1403542>.
- Galbraith, P., H. Henn and M. Niss (eds.) (2007), Modelling and Applications in Mathematics Education, Springer US, <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>.
- Grover, S. (2018), The 5th ‘C’ of 21st Century Skills? Try Computational Thinking (Not Coding) | EdSurge News, <https://www.edsurge.com/news/2018-02-25-the-5th-c-of-21st-century-skills-try-computational-thinking-not-coding> (accessed on 5 April 2018).

- Hillman, K. and S. Thomson (2010), Against the odds: influences on the post-school success of 'low performers', NCVET, Adelaide, Australia, <https://www.ncver.edu.au/publications/publications/all-publications/against-the-odds-influences-on-the-post-school-success-of-low-performers#> (accessed on 5 April 2018).
- Hoyles, C. et al. (2002), "Mathematical skills in the workplace: final report to the Science Technology and Mathematics Council", Institute of Education, University of London; Science, Technology and Mathematics Council, London. (2002), <http://discovery.ucl.ac.uk/1515581/> (accessed on 5 April 2018).
- Mahajan, S. et al. (2016), PISA Mathematics in 2021, Center for Curriculum Redesign, <http://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Recommendations-for-PISA-Maths-2021-FINAL-EXTENDED-VERSION-WITH-EXAMPLES-CCR.pdf>.
- Moore, D. (1997), "New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics", International Statistical Review, Vol. 65/2, pp. 123-165, <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/j.1751-5823.1997.tb00390.x>.
- National Research Council (2012), Education for Life and Work: Developing Transferable Knowledge and Skills in the 21st Century, The National Academies Press, Washington D.C., https://www.nap.edu/resource/13398/dbasse_070895.pdf (accessed on 5 April 2018).
- Niemelä, P. et al. (2017), Computational thinking as an emergent learning trajectory of mathematics, ACM Press, New York, New York, USA, <http://dx.doi.org/10.1145/3141880.3141885>.
- OECD (2018), PISA 2018 Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science.
- OECD (2017), PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving, OECD Publishing, Paris, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264281820-en>.
- OECD (2017), PISA for Development Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science, Preliminary Version, OECD Publishing, Paris, <http://www.oecd.org/about/publishing/corrigenda.htm>. (accessed on 6 April 2018).
- OECD (2013), PISA 2012 Assessment and Analytical Framework, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>.
- OECD (2005), The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary, OECD, Paris, <http://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf> (accessed on 5 April 2018).
- OECD (2004), The PISA 2003 Assessment Framework, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264101739-en>.
- Pei, C., D. Weintrop and U. Wilensky (2018), "Cultivating Computational Thinking Practices and Mathematical Habits of Mind in Lattice Land", Mathematical Thinking and Learning, Vol. 20/1, pp. 75-89, <http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2018.1403543>.

- Pratt, D. and R. Noss (2002), "The Microevolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness", *Journal of the Learning Sciences*, Vol. 11/4, pp. 453-488, http://dx.doi.org/10.1207/S15327809JLS1104_2.
- Rambally, G. (2017), *Applications of Computational Matrix Algebra*, AACE, Austin, Texas, <https://www.learntechlib.org/p/177277/>.
- Reimers, F. and C. Chung (2016), *Teaching and Learning for the Twenty-First Century : Educational Goals, Policies, and Curricula from Six Nations*, Harvard Education Press, Cambridge, MA.
- Resnick, M. et al. (2009), "Scratch: Programming for all", *Communications of the ACM*, Vol. 52/11, p. 60, <http://dx.doi.org/10.1145/1592761.1592779>.
- Steen, L. (1990), *On the Shoulders of Giants*, National Academies Press, Washington, D.C., <http://dx.doi.org/10.17226/1532>.
- Watson, J. and R. Callingham (2003), "Statistical literacy: A Complex hierarchical construct", *Statistics Education Research Journal*, Vol. 2, pp. 3-46.
- Weintrop, D. et al. (2016), "Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms", *Journal of Science Education and Technology*, Vol. 25/1, pp. 127-147, <http://dx.doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5>.
- Weintrop, D. and U. Wilensky (2015), *To block or not to block, that is the question*, ACM Press, New York, New York, USA, <http://dx.doi.org/10.1145/2771839.2771860>.

Anexo. Ejemplos ilustrativos

Los ítems incluidos en este anexo ilustran algunos de los aspectos nuevos más importantes del marco. Con el fin de garantizar la comparabilidad de la tendencia de los resultados en el tiempo, la mayoría de los ítems en PISA 2022 son ítems que se han utilizado en ediciones anteriores de PISA. Se puede acceder a un conjunto de ítems más amplio en <http://www.oecd.org/pisa/test>.

Los ítems proporcionados en este anexo ilustran algunos de los siguientes elementos nuevos:

- La evaluación del razonamiento matemático como se describe en el marco;
- Los cuatro temas que se han identificado con especial énfasis en la evaluación PISA 2021, fenómenos de crecimiento; aproximaciones geométricas; simulaciones por computadora; y toma de decisiones condicional;
- La gama de características de los elementos que son posibles gracias a la Evaluación de Matemáticas basada en computadora (CBAM); y
- Pensamiento computacional.

Baldosas

Ejemplifica:

- razonamiento y pensamiento computacional; y
- representaciones geométricas.

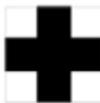
PISA 2021

BALDOSAS
Introducción

Lee "Baldosas" a la derecha. Luego haz clic en la flecha SIGUIENTE.

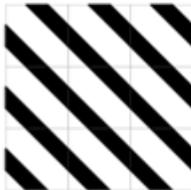
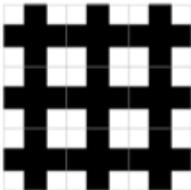
BALDOSAS

Un albañil está colocando baldosas en el piso. Tiene dos tipos de baldosas para usar, baldosa A y baldosa B.

Baldosa A Baldosa B

Usando solo las baldosas A hace el patrón que se muestra abajo a la izquierda y usando solo las baldosas B el que está a la derecha.

PISA 2021

BALDOSAS
Pregunta 1/5

Lee "Baldosas" a la derecha. Utiliza la función de arrastrar y soltar para responder a la pregunta.

El patrón de baldosas de la derecha se crea utilizando una combinación de los dos tipos de baldosas. El albañil cubre el piso continuando el mismo patrón.

Estudia el patrón.

Utiliza tu mouse para arrastrar y soltar las baldosas en su posición y termina de embaldosar el resto del piso usando el mismo patrón.

BALDOSAS

Baldosa A Baldosa B

PISA 2021

BALDOSAS
Pregunta 2/5

Lee "Baldosas" a la derecha. Utiliza la función de arrastrar y soltar para responder a la pregunta.

Arrastra y suelta las etiquetas, completando los espacios, de forma que con las instrucciones se pueda construir el diseño de la derecha.

SI ENTONCES SI NO

Baldosa A Baldosa B

INSTRUCCIONES PARA COMPLETAR EL DISEÑO.

Para filas 1 a 4
"Determinar la primera pieza en la fila"

SI la fila corresponde a una fila con número impar

ENTONCES la primera pieza es la

SI NO la primera pieza es la

"Completar la fila de izquierda a derecha"

SI la pieza anterior es

utilizar la

utilizar la

Fila siguiente.

BALDOSAS

Baldosa A Baldosa B

PISA 2021

BALDOSAS
Pregunta 3/5

Lee "Baldosas" a la derecha. Haz clic en las opciones para responder a la pregunta.

El albañil quiere poder predecir qué baldosa deberá colocar en cualquier posición de la cuadrícula. Por ejemplo, quiere saber qué baldosa utilizará en la posición marcada (m; n).

Estudia el patrón de baldosas y, en particular, la zona resaltada con un borde rojo. A continuación, selecciona **TODAS** las reglas que predecirán correctamente la baldosa que se necesita para cualquier posición (m; n) de la cuadrícula.

Regla	
Si $m + n$ es impar, usar la baldosa A, de lo contrario usar la B	<input type="radio"/>
Si $m + n$ es par, usar la baldosa A, de lo contrario usar la B	<input type="radio"/>
Si $m \times n$ es impar, usar la baldosa A, de lo contrario usar la B	<input type="radio"/>
Si $m \times n$ es par, usar la baldosa A, de lo contrario usar la B	<input type="radio"/>
Si m es impar y n es impar, usar la baldosa A, de lo contrario usar la B	<input type="radio"/>
Si m y n son ambos impares o ambos pares, usar la baldosa A, de lo contrario usar la B	<input type="radio"/>

BALDOSAS

Baldosa A Baldosa B

n

3

2

1

1 2 3 4 5

m

PISA 2021

BALDOSAS
Discusión

Leer la introducción.

Otra forma de describir el patrón es simplemente escribir las letras para cada baldosa en la posición de la cuadrícula correspondiente.

Estudia el uso de letras para registrar el patrón del diseño y luego haz clic en la flecha SIGUIENTE.

BALDOSAS

Baldosa A Baldosa B

A	B	A		
B	A	B	A	
A	B	A	B	A

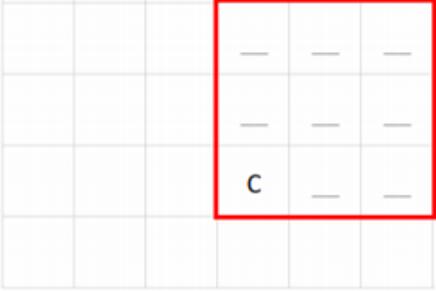
PISA 2021

BALDOSAS
Pregunta 4/5

El diseño de la derecha se crea utilizando una combinación de dos baldosas: B y C. Alex continúa el patrón de la misma manera.

Estudia el patrón.

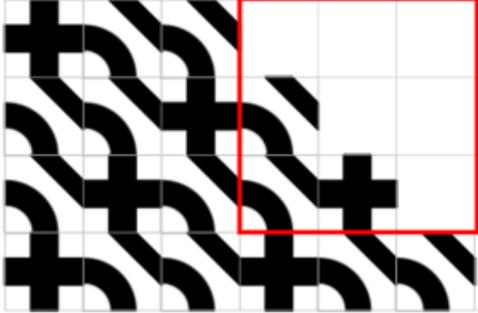
El cuadrado rojo en la cuadrícula de abajo corresponde al cuadrado rojo en la cuadrícula de la derecha. Utiliza las letras B y C para registrar la baldosa que va en cada posición del cuadrado rojo.



BALDOSAS



Baldosa B Baldosa C



PISA 2021

BALDOSAS
Pregunta 5/5

El patrón de baldosas de la derecha es una sección del medio de una superficie mucho más grande creada con la combinación de tres baldosas: A, B y C.

Estudia el patrón.

¿Cuál de los códigos siguientes describe una unidad de baldosas de 3 x 3 que puede repetirse para crear el patrón de la derecha (selecciona TODAS las que correspondan).

Unidad de 3x3 baldosas para crear el patrón				
A	B	C		<input type="radio"/>
B	A	C		
B	C	A		
B	C	A		<input type="radio"/>
C	A	B		
A	C	B		
A	B	C		<input type="radio"/>
B	C	A		
B	A	C		
A	B	C		<input type="radio"/>
B	C	A		
C	A	B		

BALDOSAS



Baldosa A Baldosa B Baldosa C



Uso del teléfonos inteligentes

Ejemplifica:

- Capacidades CBAM, en particular el uso de hojas de cálculo con clasificación y otras capacidades.

PISA 2021

USO DE TELÉFONOS INTELIGENTES
Introducción

Lee "Uso de teléfonos inteligentes" a la derecha. Luego haz clic en la flecha SIGUIENTE.

USO DE TELÉFONOS INTELIGENTES

La hoja de cálculo muestra la población (en millones) y la cantidad de usuarios de teléfonos inteligentes (en millones) para una variedad de países de Asia. Los datos han sido ordenados alfabéticamente por nombre del país.

Columna A	Columna B	Columna C	Columna D
País	Población (en millones)	Cantidad de usuarios de teléfonos inteligentes (en millones)	
Bangladesh	166.735	8.921	
Indonesia	266.357	67.57	
Japón	125.738	65.282	
Malasia	31.571	20.98	
Pakistán	200.663	23.228	
Filipinas	105.341	28.627	
Tailandia	68.416	30.486	
Turquía	81.086	44.771	
Vietnam	96.357	29.043	

PISA 2021

USO DE TELÉFONOS INTELIGENTES
Pregunta 1/3

Lee "Uso de teléfonos inteligentes" a la derecha. Haz clic en una opción para responder la pregunta.

¿Qué operación entre las columnas B y C determinará los valores correctos en la columna D?

Para cada país:

- Dividir el valor de la Columna B por el valor de la Columna C:
 B / C
- Dividir la suma de los valores de la Columna B y la Columna C por el valor de la Columna C:
 $(B + C) / C$
- Dividir el valor de la Columna C por el valor de la Columna B:
 C / B
- Dividir el valor de la Columna B por la suma de los valores de la Columna B y la Columna C:
 $B / (B + C)$

USO DE TELÉFONOS INTELIGENTES

La hoja de cálculo muestra la población (en millones) y la cantidad de usuarios de teléfonos inteligentes (en millones) para una variedad de países de Asia. Los datos han sido ordenados alfabéticamente por nombre del país.

Columna A	Columna B	Columna C	Columna D
País	Población (en millones)	Cantidad de usuarios de teléfonos inteligentes (en millones)	Proporción de usuarios de teléfonos inteligentes
Bangladesh	166.735	8.921	
Indonesia	266.357	67.57	
Japón	125.738	65.282	
Malasia	31.571	20.98	
Pakistán	200.663	23.228	
Filipinas	105.341	28.627	
Tailandia	68.416	30.486	
Turquía	81.086	44.771	
Vietnam	96.357	29.043	

PISA 2021

USO DE TELÉFONOS INTELIGENTES
Pregunta 2/3

Puedes ordenar los datos en la hoja de cálculo con el botón ordenar en el encabezado de la columna. Los datos se ordenarán en sentido creciente.

Haz clic en Verdadero o Falso para cada una de las siguientes afirmaciones.

Afirmación	Verdadero	Falso
El país con la mayor población también tiene el mayor número de usuarios de teléfonos inteligentes.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
El país con el menor número de usuarios de teléfonos inteligentes también tiene la menor población.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
El país con la mayor proporción de usuarios de teléfonos inteligentes también tiene la menor población.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
El país con la mediana de la proporción de usuarios de teléfonos inteligentes es también el país con la mediana de usuarios de teléfonos inteligentes.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

USO DE TELÉFONOS INTELIGENTES

Los datos de la proporción de usuarios de teléfonos inteligentes (expresados como porcentaje) se agregaron a la hoja de cálculo en la Columna D.

Columna A	Columna B	Columna C	Columna D
País	Población (en millones)	Cantidad de usuarios de teléfonos inteligentes (en millones)	Proporción de usuarios de teléfonos inteligentes
Bangladesh	166.735	8.921	5%
Indonesia	266.357	67.57	25%
Japón	125.738	65.282	52%
Malasia	31.571	20.98	38%
Pakistán	200.663	23.228	12%
Filipinas	105.341	28.627	27%
Tailandia	68.416	30.486	45%
Turquía	81.086	44.771	55%
Vietnam	96.357	29.043	30%

PISA 2021

USO DE TELÉFONOS INTELIGENTES
Pregunta 3/3

Puedes cambiar la variable del eje horizontal entre la Población (en millones) y el Salario Mínimo por hora (en Zeds) de cada país seleccionando la pestaña correspondiente.

Selecciona las pestañas correspondientes, estudia los diferentes gráficos y responde la pregunta.

¿Para qué variable (población o salario por hora) aumenta la proporción de usuarios de teléfonos inteligentes en un país a medida que aumenta el valor de la variable?

Población
 Salario mínimo por hora (Zeds)

Explica tu razonamiento:

USO DE TELÉFONOS INTELIGENTES

El gráfico muestra la proporción de usuarios de teléfonos inteligentes por país en términos de población (en millones) y salario mínimo por hora (en Zeds) para cada país.

Población **Salario por hora**

País	Población (millones)	Proporción de usuarios de teléfonos inteligentes (%)
Turquía	20	55
Tailandia	70	45
Malasia	40	38
Vietnam	100	32
Filipinas	100	28
Japón	130	52
Pakistán	200	12
Bangladesh	170	8
Indonesia	270	25

PISA 2021

USO DE TELÉFONOS INTELIGENTES
Pregunta 3/3

Puedes cambiar la variable del eje horizontal entre la Población (en millones) y el Salario Mínimo por hora (en Zeds) de cada país seleccionando la pestaña correspondiente.

Selecciona las pestañas correspondientes, estudia los diferentes gráficos y responde la pregunta.

¿Para qué variable (población o salario por hora) aumenta la proporción de usuarios de teléfonos inteligentes en un país a medida que aumenta el valor de la variable?

Población
 Salario por hora (Zeds)

Explica tu razonamiento:

USO DE TELÉFONOS INTELIGENTES

El gráfico muestra la proporción de usuarios de teléfonos inteligentes por país en términos de población (en millones) y salario mínimo por hora (en Zeds) para cada país.

Población **Salario por hora**

País	Población (millones)	Proporción de usuarios de teléfonos inteligentes (%)
Turquía	20	55
Tailandia	70	45
Malasia	40	38
Vietnam	100	32
Filipinas	100	28
Japón	130	52
Pakistán	200	12
Bangladesh	170	8
Indonesia	270	25

Simulador de ahorros

Ejemplifica:

- Uso de simulación por computadora; y
- crecimiento en contexto e impacto de intereses.

PISA 2021

SIMULADOR DE AHORROS
Introducción

Lee "Uso de teléfonos inteligentes" a la derecha. Luego haz clic en la flecha SIGUIENTE.

SIMULADOR DE AHORROS

Silvia y sus padres están analizando cual es la mejor forma de ahorrar dinero para solventar sus gastos cuando vaya a la universidad. Encontraron una aplicación en línea de simulación de ahorros que les permite explorar diferentes formas de obtener el dinero que necesitarán.

El simulador considera cuatro variables:

- **Depósito mensual:** es la suma de dinero que la familia deposita cada mes en la cuenta de ahorro;
- **Período de ahorro:** es el número de meses durante los que la familia realiza el depósito mensual en la cuenta de ahorro;
- La **tasa de interés anual** que se aplica a la cuenta de ahorro; y
- El **ahorro total:** la cantidad total de dinero al final del período de ahorro.

La aplicación permite al usuario realizar tres tipos de simulación:

- **Ahorro total:** el total ahorrado si se conocen el monto del depósito mensual, la tasa de interés y el período de ahorro;
- **Depósito mensual:** el monto del depósito mensual necesario para obtener un total de ahorros dado un período de tiempo y la tasa de interés; y
- **Período de ahorro:** el período total (en número de meses) que se necesita para obtener el total de ahorros deseados para un depósito mensual y una tasa de interés conocidos.

PISA 2021

SIMULADOR DE AHORROS

Introducción

Usar el simulador requiere dos pasos:

- 1- Seleccionar lo que quieres simular; y
- 2- Digitar los valores de las variables relevantes.

El simulador te permite guardar detalles de hasta cinco simulaciones por vez.

Explora como funciona el simulador y luego haz clic en la flecha SIGUIENTE.

SIMULADOR DE AHORROS

Paso 1: elige lo que quieres simular: Elige lo que quieres simular:

Paso 2: completa la información requerida usando los deslizadores resaltados (rojo):

Período de ahorro: 0 Meses

Depósito mensual: 0 Zeds

Tasa de interés anual: 0 % por año

Ahorro total: 0 Zeds

Guardar datos Borrar datos guardados

Simulación #	Período de ahorro (meses)	Depósito mensual (Zeds)	Tasa de interés anual (%)	Cantidad total ahorrada (Zeds)
1				
2				
3				
4				
5				

PISA 2021

SIMULADOR DE AHORROS

Introducción

Usar el simulador requiere dos pasos:

- 1- Seleccionar lo que quieres simular; y
- 2- Digitar los valores de las variables relevantes.

El simulador te permite guardar detalles de hasta cinco simulaciones por vez.

Explora como funciona el simulador y luego haz clic en la flecha SIGUIENTE.

*Esta pantalla no aparece en la unidad.
Se incluye para dar al lector la idea de lo que experimentará el estudiante*

SIMULADOR DE AHORROS

Paso 1: elige lo que quieres simular: La cantidad total ahorrada

Paso 2: completa la información requerida usando los deslizadores resaltados (rojo):

Período de ahorro: 48 Meses

Depósito: 40 Zeds

Tasa de interés: 10 % por

Ahorro total: 2350 Zeds

Guardar datos Borrar datos guardados

Simulación #	Período de ahorro (meses)	Depósito mensual (Zeds)	Tasa de interés anual (%)	Cantidad total ahorrada (Zeds)
1	12	40	6	495
2	48	40	6	2165
3	12	40	10	505
4	48	40	10	2350
5				

PISA 2021

SIMULADOR DE AHORROS
Introducción

Usar el simulador requiere dos pasos:

- 1- Seleccionar lo que quieres simular; y
- 2- Digitar los valores de las variables relevantes.

El simulador te permite guardar detalles de hasta cinco simulaciones por vez.

Explora como funciona el simulador y luego haz clic en la flecha SIGUIENTE.

*Esta pantalla no aparece en la unidad.
Se incluye para dar al lector la idea de lo que experimentará el estudiante*

SIMULADOR DE AHORROS

Paso 1: elige lo que quieres simular:

Paso 2: completa la información requerida usando los deslizadores resaltados (rojo):

Período de ahorro: Meses

Depósito mensual: Zeds

Tasa de interés anual: % por año

Ahorro total: Zeds

Guardar datos Borrar datos guardados

Simulación #	Período de ahorro (meses)	Depósito mensual (Zeds)	Tasa de interés anual (%)	Cantidad total ahorrada (Zeds)
1	12	405	6	5000
2	48	92	6	5000
3	18	255	12	5000
4	48	82	12	5000
5				

PISA 2021

SIMULADOR DE AHORROS
Introducción

Usar el simulador requiere dos pasos:

- 1- Seleccionar lo que quieres simular; y
- 2- Digitar los valores de las variables relevantes.

El simulador te permite guardar detalles de hasta cinco simulaciones por vez.

Explora como funciona el simulador y luego haz clic en la flecha SIGUIENTE.

*Esta pantalla no aparece en la unidad.
Se incluye para dar al lector la idea de lo que experimentará el estudiante*

SIMULADOR DE AHORROS

Paso 1: elige lo que quieres simular:

Paso 2: completa la información requerida usando los deslizadores resaltados (rojo):

Período de ahorro: Meses

Depósito: Zeds

Tasa de interés: % por

Ahorro total: Zeds

Guardar datos Borrar datos guardados

Simulación #	Período de ahorro (meses)	Depósito mensual (Zeds)	Tasa de interés anual (%)	Cantidad total ahorrada (Zeds)
1	97	40	6	5000
2	55	80	6	5000
3	81	40	12	5000
4	49	80	12	5000
5				

PISA 2021

SIMULADOR DE AHORROS

Pregunta 1/3

Usa el simulador para calcular la cantidad desconocida en cada situación.

- ¿Cuántos Zeds ahorrará Silvia en total si:
 - Deposita 60 Zeds por mes,
 - Por un período de 48 meses,
 - A una tasa de interés anual del 4%?

Ingresar tu respuesta aquí
- ¿Cuántos Zeds debe depositar Silvia cada mes si:
 - Quiere ahorrar 4.000 Zeds,
 - En un período de 36 meses,
 - A una tasa de interés anual del 8%?

Ingresar tu respuesta aquí
- ¿Cuánto tiempo (en meses) le llevará a Silvia:
 - Ahorrar 6.000 Zeds,
 - Si deposita 100 Zeds por mes,
 - A una tasa de interés anual del 10%?

Ingresar tu respuesta aquí

SIMULADOR DE AHORROS

Paso 1: elige lo que quieres simular:

Paso 2: completa la información requerida usando los deslizadores resaltados (rojo):

Período de ahorro: Meses

Depósito mensual: Zeds

Tasa de interés anual: % por año

Ahorro total: Zeds

Simulación #	Período de ahorro (meses)	Depósito mensual (Zeds)	Tasa de interés anual (%)	Cantidad total ahorrada (Zeds)
1				
2				
3				
4				
5				

PISA 2021

SIMULADOR DE AHORROS

Pregunta 2/3

Para cada simulación selecciona **DOS AFIRMACIONES** para justificar el uso del simulador dado.

Simulación	Afirmación		
	Tu sabes cuanto dinero vas a necesitar	Tu sabes cuanto dinero puedes ahorrar por mes	Tu sabes cuando vas a necesitar el dinero
Simulación del período de ahorro	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Simulación del depósito mensual	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Simulación del total ahorrado	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

SIMULADOR DE AHORROS

Paso 1: elige lo que quieres simular:

Paso 2: completa la información requerida usando los deslizadores resaltados (rojo):

Período de ahorro: Meses

Depósito mensual: Zeds

Tasa de interés anual: % por año

Ahorro total: Zeds

Simulación #	Período de ahorro (meses)	Depósito mensual (Zeds)	Tasa de interés anual (%)	Cantidad total ahorrada (Zeds)
1				
2				
3				
4				
5				

PISA 2021

SIMULADOR DE AHORROS
Pregunta 3/3

Silvia hizo algunas simulaciones, ella dice: "Me doy cuenta que cuando no gano intereses y duplico el depósito mensual, el período de ahorro se duplica. Pero, cuando gano interés y duplico el depósito mensual el período de ahorros no se duplica."

Selecciona la pestaña adecuada para estudiar los registros en la simulación de Silvia y haz tus propias simulaciones para responder las preguntas.

- Completa la frase:
La observación de Silvia es:
 - siempre verdadera
 - a veces verdadera, depende de la tasa de interés.
- Completa la frase:
Para un total de ahorros fijo y una cuota mensual fija, un aumento en la tasa de interés reduce más el período de ahorro cuando:
 - el importe mensual es más pequeño.
 - el importe mensual es mayor.
- Brinda una justificación para la afirmación que completaste en la pregunta 2.

Escribe aquí la justificación

Simulación de Silvia | **Simulador en blanco**

SIMULADOR DE AHORROS

Paso 1: elige lo que quieres simular:

Paso 2: completa la información requerida usando los deslizadores resaltados (rojo):

Período de ahorro: Meses
 Depósito mensual: Zeds
 Tasa de interés anual: % por año
 Ahorro total: Zeds

Guardar datos | Borrar datos guardados

Simulación #	Período de ahorro (meses)	Depósito mensual (Zeds)	Tasa de interés anual (%)	Cantidad total ahorrada (Zeds)
1	300	20	0	6000
2	150	40	0	6000
3	184	20	6	6000
4	112	40	6	6000
5				

PISA 2021

SIMULADOR DE AHORROS
Pregunta 3/3

Silvia hizo algunas simulaciones, ella dice: "Me doy cuenta que cuando no gano intereses y duplico el depósito mensual, el período de ahorro se duplica. Pero, cuando gano interés y duplico el depósito mensual el período de ahorros no se duplica."

Selecciona la pestaña adecuada para estudiar los registros en la simulación de Silvia y haz tus propias simulaciones para responder las preguntas.

- Completa la frase:
La observación de Silvia es:
 - siempre verdadera
 - a veces verdadera, depende de la tasa de interés.
- Completa la frase:
Para un total de ahorros fijo y una cuota mensual fija, un aumento en la tasa de interés reduce más el período de ahorro cuando:
 - el importe mensual es más pequeño.
 - el importe mensual es mayor.
- Brinda una justificación para la afirmación que completaste en la pregunta 2.

Escribe aquí la justificación

Simulación de Silvia | **Simulador en blanco**

SIMULADOR DE AHORROS

Paso 1: elige lo que quieres simular:

Paso 2: completa la información requerida usando los deslizadores resaltados (rojo):

Período de ahorro: Meses
 Depósito mensual: Zeds
 Tasa de interés anual: % por año
 Ahorro total: Zeds

Guardar datos | Borrar datos guardados

Simulación #	Período de ahorro (meses)	Depósito mensual (Zeds)	Tasa de interés anual (%)	Cantidad total ahorrada (Zeds)
1				
2				
3				
4				
5				

Decisión de compra

Ejemplifica:

- Toma de decisiones condicional.

PISA 2021

DECISIÓN DE COMPRA
Introducción

Lee "Decisión de compra" a la derecha. Luego haz clic en la flecha SIGUIENTE.

DECISIÓN DE COMPRA

Andrea está comprando en línea un par nuevo de auriculares. Ya identificó el par que quiere. Sin embargo, se da cuenta que aunque el número total de reseñas es pequeño, el producto ha recibido muchas reseñas bajas: un 25% en total, con 1 o 2 estrellas.

Auriculares estéreo con audífono y micrófono.

Calificación promedio basada en 163 calificaciones

5 estrellas	<div style="width: 70%; height: 15px; background-color: #c6e0b4; border: 1px solid #a6c9ec;"></div>	47 (29%)
4 estrellas	<div style="width: 65%; height: 15px; background-color: #c6e0b4; border: 1px solid #a6c9ec;"></div>	41 (25%)
3 estrellas	<div style="width: 55%; height: 15px; background-color: #c6e0b4; border: 1px solid #a6c9ec;"></div>	34 (21%)
2 estrellas	<div style="width: 45%; height: 15px; background-color: #c6e0b4; border: 1px solid #a6c9ec;"></div>	28 (17%)
1 estrella	<div style="width: 20%; height: 15px; background-color: #c6e0b4; border: 1px solid #a6c9ec;"></div>	13 (8%)

67

PISA 2021     

DECISIÓN DE COMPRA
Introducción (continuación)

Lee "Decisión de compra" a la derecha. Luego haz clic en la flecha SIGUIENTE.

DECISIÓN DE COMPRA

Para tomar la decisión de comprar o no el producto, Andrea estudió los comentarios de las reseñas con 1 o 2 estrellas y notó que algunas no tenían nada que ver con la calidad o funcionamiento del producto.

Agrupó las respuestas de las reseñas de 1 o 2 estrellas y lo resumió en la tabla.

COMENTARIO	Cantidad
Los auriculares llegaron tarde	13
Los auriculares nunca llegaron	4
El cable estaba dañado o no llegó	7
Uno o los dos audífonos llegó roto	4
El empaquetado no fue atractivo	5
Calificación incorrecta (buena reseña, mala calificación)	8



PISA 2021     

DECISIÓN DE COMPRA
Pregunta 1/2

Andrea revisó todos los comentarios y notó que solo quienes califican con 1 o 2 estrellas hacen comentarios sobre la poca calidad o sobre la llegada tardía o no llegada del producto.

Usa la información de las pestañas **Reseñas en línea** y **Tabla resumen** así como la calculadora para responder las preguntas.

Pregunta	Respuesta
¿Qué porcentaje del total de reseñas refieren a la baja calidad del producto?	
¿Qué porcentaje de las reseñas de 1 o 2 estrellas refieren a que el producto llegó tarde o no llegó?	

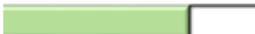
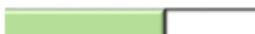
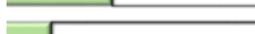
DECISIÓN DE COMPRA

Reseñas en línea
Tabla resumen

Auriculares estéreo con audífono y micrófono.



Calificación promedio basada en 163 calificaciones

5 estrellas		47 (29%)
4 estrellas		41 (25%)
3 estrellas		34 (21%)
2 estrellas		28 (17%)
1 estrella		13 (8%)



PISA 2021

DECISIÓN DE COMPRA
Pregunta 1/2

Andrea revisó todos los comentarios y notó que solo quienes califican con 1 o 2 estrellas hacen comentarios sobre la poca calidad o sobre la llegada tardía o no llegada del producto.

Usa la información de las pestañas **Reseñas en línea** y **Tabla resumen** así como la calculadora para responder las preguntas.

Pregunta	Respuesta
¿Qué porcentaje del total de reseñas refieren a la baja calidad del producto?	
¿Qué porcentaje de las reseñas de 1 o 2 estrellas refieren a que el producto llegó tarde o no llegó?	

DECISIÓN DE COMPRA

Reseñas en línea **Tabla resumen**

COMENTARIO	Cantidad
Los auriculares llegaron tarde	13
Los auriculares nunca llegaron	4
El cable estaba dañado o no llegó	7
Uno o los dos audífonos llegó roto	4
El empaquetado no fue atractivo	5
Calificación incorrecta (buena reseña, mala calificación)	8



PISA 2021

DECISIÓN DE COMPRA
Pregunta 2/2

Andrea revisó todos los comentarios y notó que solo quienes califican con 1 o 2 estrellas hacen comentarios sobre la poca calidad o sobre la llegada tardía o no llegada del producto.

Usa la información de las pestañas **Reseñas en línea** y **Tabla resumen** así como la calculadora para responder las preguntas.

Pregunta	Respuesta
A Andrea le preocupa que los auriculares lleguen tarde o no lleguen. Basándose en la información de las pestañas Reseñas en línea y Tabla resumen , ¿cuán probable es que el producto llegue tarde o no llegue? Expresa tu respuesta como fracción o cómo porcentaje.	

DECISIÓN DE COMPRA

Reseñas en línea **Tabla resumen**

Auriculares estéreo con audífono y micrófono.



Calificación promedio basada en 163 calificaciones

5 estrellas		47 (29%)
4 estrellas		41 (25%)
3 estrellas		34 (21%)
2 estrellas		28 (17%)
1 estrella		13 (8%)



PISA 2021

DECISIÓN DE COMPRA
Pregunta 2/2

Andrea revisó todos los comentarios y notó que solo quienes califican con 1 o 2 estrellas hacen comentarios sobre la poca calidad o sobre la llegada tardía o no llegada del producto.

Usa la información de las pestañas **Reseñas en línea** y **Tabla resumen** así como la calculadora para responder las preguntas.

Pregunta	Respuesta
A Andrea le preocupa que los auriculares lleguen tarde o no lleguen.	
Basándose en la información de las pestañas Reseñas en línea y Tabla resumen , ¿cuán probable es que el producto llegue tarde o no llegue?	
Expresa tu respuesta como fracción o cómo porcentaje.	

DECISIÓN DE COMPRA

Reseñas en línea **Tabla resumen**

COMENTARIO	Cantidad
Los auriculares llegaron tarde	13
Los auriculares nunca llegaron	4
El cable estaba dañado o no llegó	7
Uno o los dos audífonos llegó roto	4
El empaquetado no fue atractivo	5
Calificación incorrecta (buena reseña, mala calificación)	8





PISA
URUGUAY



ANEP