

La evaluación de la Competencia Matemática

Marco conceptual PISA 2012

Actividades de prueba

Administración Nacional de Educación Pública
Consejo Directivo Central

Dirección Sectorial de Planificación Educativa
División de Investigación, Evaluación y Estadística
Programa PISA Uruguay

Montevideo, noviembre de 2011

Presidente del Consejo Directivo Central

Dr. JOSÉ SEOANE

Consejeros

Mtra. TERESITA CAPURRO

Mtra. NORA CASTRO

Lic. DANIEL CORBO

Prof. NÉSTOR PEREIRA

Director General del Consejo de Educación Inicial y Primaria

Mtro. HÉCTOR FLORIT

Consejera

Mtra. IRUPÉ BUZZETTI

Directora General del Consejo de Educación Secundaria

Prof. Ing. JUAN PEDRO TINETTO

Consejeros

Prof. EMA ZAFFARONI

Prof. DANIEL GUASCO

Director General del Consejo de Educación Técnico Profesional

Prof. WILSON NETTO

Consejeros

Insp. JUAN JOSÉ DE LOS SANTOS

Arq. FERNANDO TOMELO

Directora General del Consejo de Formación en Educación

Mag. EDITH MORAES

Consejeros

Lic. SELVA ARTIGAS

Prof. LAURA MOTTA

Director de la División de Investigación, Evaluación y Estadística

Dr. ANDRÉS PERI

Coordinador Nacional del Programa PISA-URUGUAY

Prof. MARÍA H. SÁNCHEZ

Redactor responsable

Prof. Marlene Fernández

Editor Responsable

Prof. María H. Sánchez

Índice

1. Introducción	3
2. Definición de <i>competencia matemática</i> en PISA 2012	3
2.1 Una imagen de los estudiantes como quienes resuelven problemas activamente.....	6
2.2 Modelización en Matemática.....	6
2.3 Variedad de contextos	8
2.4 Uso de herramientas matemáticas	8
3. Dimensiones del dominio de la evaluación.....	8
3.1 Contenido Matemático	9
3.2 Procesos Matemáticos	16
3.3 Contextos	26
4. La evaluación de la competencia matemática en PISA 2012	29
4.1 Estructura de la prueba de Matemática.....	29
4.2 Distribución de los ítems según las dimensiones del marco y su dificultad.....	29
4.3 Estructura del instrumento del estudio.....	30
4.4 Diseño de los ítems de Matemática	31
4.5 Clasificación del logro de las respuestas de los ítems	32
4.6 Informe de resultados en base a las competencias	32
5. Actitudes hacia la matemática	35
Apéndice I: Competencias matemáticas fundamentales y su relación con la dificultad del ítem	37
Apéndice II: Ítems que ejemplifican el marco conceptual de la evaluación de la competencia en Matemática en PISA	42
• Las Pizzas	
• Basura	
• Concierto de rock	

1. INTRODUCCIÓN

Desde el año 2003 Uruguay forma parte del conjunto de países que aplican la evaluación PISA (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes de OCDE), que es un estudio internacional de evaluación de logros de los estudiantes en el que participarán 74 países en el ciclo 2012. Esta evaluación se desarrolla en ciclos de 3 años y estudia los desempeños de los estudiantes en las áreas de Lectura, Matemática y Ciencias; cada una de ellas adquiere particular importancia en el momento en que se constituye en foco de la evaluación.

Este es el caso para el área Matemática en PISA 2012. Si bien todas las áreas son evaluadas en cada uno de los ciclos 2000, 2003, 2006 y 2009, es la segunda oportunidad en que Matemática es el foco del estudio, como lo fue en el año 2003. Los datos que se recaben en 2012 permitirán hacer comparaciones sobre el desempeño de los estudiantes a lo largo del tiempo a la vez que darán la oportunidad de analizar los resultados a la luz de lo que ha ocurrido en el campo de las prácticas y políticas educativas. Un desafío inherente al desarrollo del marco conceptual para la evaluación del área Matemática para 2012 es mantener las cualidades psicométricas de las evaluaciones anteriores para que habiliten el estudio de tendencias a lo largo del conjunto de evaluaciones PISA.

El marco PISA 2012 está diseñado de forma de garantizar contextos significativos y auténticos en las tareas desarrolladas y donde el ciclo de modelización matemática, utilizado en marcos anteriores para describir las etapas que atraviesan los individuos para resolver problemas contextualizados, sigue siendo una característica clave. Se utiliza para definir los procesos matemáticos que los estudiantes ponen en marcha a la hora de resolver los problemas; procesos que serán utilizados por primera vez en 2012 como dimensión para divulgar la información que se recoja sobre los logros de los jóvenes escolarizados de 15 años.

Este documento presenta un resumen del marco desarrollado por PISA para la evaluación de la *competencia matemática* en 2012 y una recopilación de diferentes materiales que ejemplifican este marco.

2. DEFINICIÓN DE COMPETENCIA MATEMÁTICA EN PISA 2012

El conocimiento matemático es esencial para la preparación de los jóvenes para la vida en la sociedad moderna ya que una creciente proporción de problemas y situaciones que se presentan en el trabajo y contextos profesionales, requieren razonamiento de cierto nivel, utilización de estrategias y herramientas matemáticas. Por tanto es importante tener una comprensión de qué tan preparados están los jóvenes que egresan de la educación básica para aplicar Matemática, para entender cuestiones que la involucran

y resolver problemas significativos. Una evaluación a la edad de 15 años da una señal temprana de cómo los jóvenes podrían responder más adelante a las diversas situaciones con las que se enfrentarán y que requieran de la utilización de las habilidades que este estudio releva.

Como base para una evaluación internacional de estudiantes de 15 años, es razonable preguntar:

- *¿qué es importante para las personas conocer y saber hacer en situaciones que involucran Matemática?*
- *¿qué significa ser competente en Matemática para un joven de 15 años, que podría estar egresando de la enseñanza básica o preparándose para seguir una formación específica para una carrera u oficio o ingresar en la Universidad?*

Es importante que el concepto de *competencia matemática*, que es utilizado en este documento para señalar la capacidad de los individuos para *formular, aplicar e interpretar* Matemática en contextos variados, no sea percibido como sinónimo de conocimientos y destrezas mínimas o de bajo nivel. Por el contrario, está pensado en base a las capacidades de los individuos para razonar matemáticamente y aplicar conceptos matemáticos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Una premisa de PISA es que, con el fin de mejorar las posibilidades de éxito en la vida adulta, es necesario que la educación Matemática que reciban los estudiantes les brinde las oportunidades de experimentar cómo la Matemática es usada en una variedad de contextos, no solamente áulicos. Esta posición no niega la importancia para los estudiantes del desarrollo de una sólida comprensión de conceptos de la Matemática pura, ni de lo beneficioso que es para ellos involucrarse en exploraciones en el mundo abstracto de la Matemática o de desarrollar alto nivel de destreza algorítmica. Sin embargo, la construcción de la *competencia matemática*, como la define PISA, llama al equilibrio desarrollando también en los estudiantes la capacidad de usar Matemática en contextos auténticos para lo que es importante que tengan ricas experiencias en clase que acompañe ese desarrollo. Esto es cierto para aquellos estudiantes de 15 años que están cerca del final de su formación matemática así como aquellos que continuarán con el estudio formal de la disciplina. Se agrega a lo anterior que para casi todos los alumnos, la motivación para aprender Matemática es mayor cuando ven la importancia y la utilidad de lo que están aprendiendo. La *Competencia matemática* no es un atributo que un individuo tiene o no tiene sino que es un atributo que está en proceso continuo de desarrollo; algunos individuos se muestran matemáticamente más competentes que otros y todos poseen el potencial de desarrollar esta habilidad.

La Competencia matemática naturalmente trasciende los límites de la edad. Sin embargo, su evaluación en jóvenes de 15 años debe tener en cuenta características relevantes de los estudiantes; por lo que es necesario identificar los contenidos, el lenguaje y los contextos apropiados para la edad. Como resultado,

este marco distingue entre categorías amplias de contenido, que son importantes para la *competencia matemática* de los individuos en general y los contenidos específicos que son apropiados para estudiantes de 15 años.

Como ya se ha mencionado, el ciclo en que el área es foco del estudio es la oportunidad para revisar, analizar y profundizar los fundamentos de su evaluación con el cuidado de mantener las cualidades sicométricas de la misma para no perder comparabilidad de resultados en el tiempo. Es así que la definición de la competencia matemática para PISA 2012 ha sido uno de los aspectos revisados y por tanto modificada pero se ha preservado la esencia de la misma al mantener el reconocimiento del papel que juega la matemática en el mundo para el desempeño de los individuos como ciudadanos participes en la toma de decisiones, reflexivos y comprometidos con la sociedad que integran. La definición reformulada hace énfasis en las dimensiones del marco conceptual explicitando los procesos cognitivos considerados clave para lograr ese desempeño en la vida en sociedad así como los contextos variados de que harán uso las actividades de prueba.

La siguiente tabla presenta las definiciones de la *competencia matemática* utilizadas en PISA:

ciclo	Definición de <i>competencia matemática</i> para la evaluación PISA
2000, 2003, 2006 , 2009	<p><i>“la capacidad de un individuo para identificar y comprender el rol que las matemáticas juegan en el mundo, para emitir juicios fundamentados y para utilizar e involucrarse con la matemática de forma que se corresponda con las necesidades de su propia vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo”.</i></p>
2012	<p><i>“la capacidad del individuo de formular, usar e interpretar Matemática en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y usar conceptos matemáticos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar, y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el rol que la Matemática juega en el mundo, a emitir juicios bien fundados y tomar decisiones que son necesarias en su vida como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos”.</i></p>

A continuación se analizan algunos aspectos de la definición de la *competencia matemática* para PISA 2012 que son particularmente importantes:

2.1 Una imagen de los estudiantes como quienes resuelven problemas activamente.

El foco de la definición de *competencia matemática* está en la participación activa en la Matemática y hace énfasis en el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos, y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. En particular, los verbos “formular”, “usar”, e “interpretar” apuntan a los tres procesos que los estudiantes activarán como diligentes solucionadores de problemas.

Formular en Matemática implica identificar oportunidades de aplicarla y utilizarla, observando qué contenido matemático puede ser abordado para entender o resolver algún desafío planteado. Incluye ser capaz de tomar una situación tal como se presenta y transformarla en una estructura susceptible de ser tratada matemáticamente. Esto implica, proporcionar una representación y estructura matemática, identificar las variables y plantear hipótesis simplificadoras que permitan hacer frente al reto o resolver el problema.

Usar en Matemática implica aplicar razonamiento y conceptos, procedimientos, datos y herramientas de la disciplina para obtener una solución matemática a la situación planteada. Incluye realizar cálculos, manipular expresiones algebraicas, ecuaciones u otros modelos matemáticos, analizar la información de diagramas y gráficos, desarrollar descripciones matemáticas y explicaciones y usar herramientas para resolver problemas.

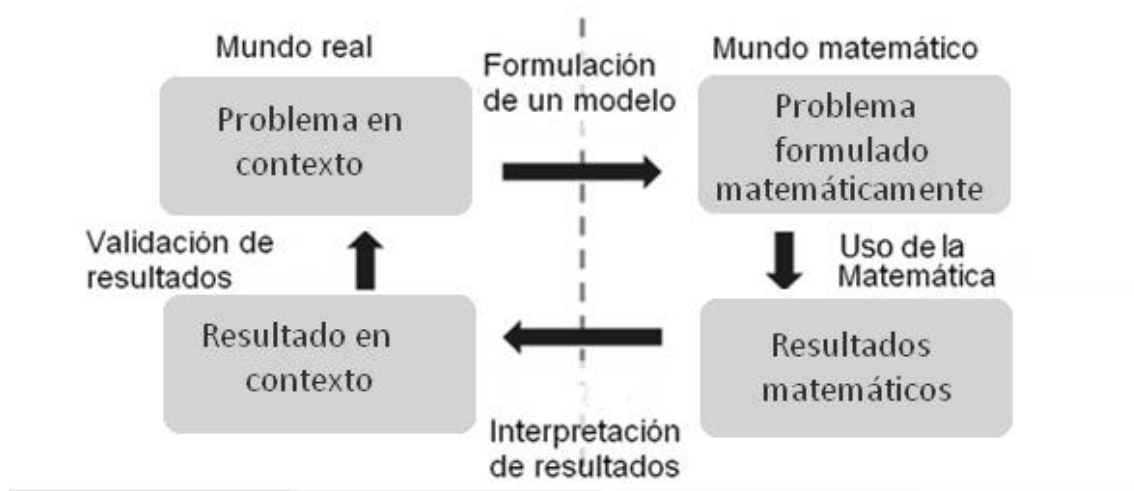
Interpretar en Matemática implica reflexionar sobre las soluciones o resultados e interpretarlos en el contexto del problema. Incluye la valoración de las soluciones matemáticas y del razonamiento en relación al contexto del problema y la decisión de si los resultados son razonables y tienen sentido en la situación.

2.2 Modelización en Matemática

La definición de *competencia matemática* integra la noción de modelización matemática, que ha sido históricamente uno de los pilares del marco conceptual de la evaluación en Matemática en PISA. En la Figura 1 se presenta un esquema de cómo los individuos utilizan la Matemática y sus herramientas para resolver problemas contextualizados, así como también el avance de su trabajo a través de una serie de etapas. El proceso de modelización matemática empieza con el planteo de un “problema en contexto”. Quien se enfrenta a resolver un problema identifica la matemática relevante en la situación planteada y **formula** la situación matemáticamente de acuerdo a los conceptos y relaciones identificados. Transforma el “problema en contexto” en un “problema formulado matemáticamente” susceptible de tratamiento matemático. La siguiente etapa del proceso describe el trabajo realizado por la persona que se plantea el

desafío de resolver el problema: **usa** conceptos matemáticos, procedimientos, datos y herramientas para encontrar el “resultado matemático”. Esta etapa generalmente implica razonamiento, manipulación, transformación y cálculo. Luego, los “resultados matemáticos” deben ser **interpretados** en términos del problema original: “resultados en contexto”. Esto supone la interpretación, aplicación y evaluación de los resultados matemáticos y su pertinencia en el contexto auténtico en que se basa el problema. Estos procesos de *formulación*, *uso* e *interpretación* matemática son componentes clave en el ciclo de la modelización matemática y también son componentes clave en la definición de *competencia matemática*.

Figura 1: Competencia matemática en acción



La descripción del ciclo de modelización matemática anterior presenta un panorama idealizado y simplificado de la *competencia matemática*. Es un *esquema* de como se observa en la práctica, aunque con frecuencia no es necesario incursionar en todas las etapas del ciclo de modelización al resolver un problema. A menudo se da el caso de que partes significativas del ciclo de modelización matemática han sido realizadas por otros, y el usuario final lleva a cabo algunas etapas del ciclo, pero no todas ellas. Por ejemplo, en algunos casos, representaciones matemáticas como gráficos o ecuaciones, son dadas para que puedan ser manipuladas directamente con el fin de responder algunas preguntas o sacar algunas conclusiones. Por esta razón, algunos ítems de PISA involucran solo partes del ciclo de modelización. En realidad, quien se plantea resolver el problema también puede a veces oscilar entre los procesos y las etapas, volviendo a revisar decisiones y supuestos anteriores. Cada una de las etapas puede presentar desafíos considerables y pueden requerir varias iteraciones del ciclo completo.

2.3 Variedad de contextos

La referencia a “una variedad de contextos” en la definición de la *competencia matemática* es intencional entendido como una forma de vincular los contextos específicos, (personales, ocupacionales, sociales y científicos) que serán descriptos y ejemplificados más adelante en este documento y se utilizan para reflejar una amplia gama de situaciones en las que los individuos pueden encontrar oportunidades de matematizar.

2.4 Uso de herramientas matemáticas

La definición de *competencia matemática* explícitamente incluye el uso de herramientas matemáticas. Estas herramientas abarcan una variedad de equipos físicos y digitales¹, como software y calculadoras. Las herramientas informáticas son de uso común en los lugares de trabajo del siglo XXI y serán cada vez más frecuentes a medida que avance el siglo. La naturaleza de los problemas relacionados con el trabajo y el razonamiento lógico se han expandido con estas nuevas oportunidades de creación de nuevos escenarios para la puesta en marcha de la competencia matemática.

3. DIMENSIONES DEL DOMINIO DE LA EVALUACIÓN

PISA evalúa hasta qué punto los estudiantes de 15 años se manejan hábilmente en Matemática cuando se enfrentan con situaciones y problemas que habitualmente son presentados en contextos auténticos.

A los efectos de la evaluación, la definición de *competencia matemática* en PISA 2012 puede ser analizada en términos de tres aspectos interrelacionados:

- El *contenido* matemático que las actividades de prueba abordan.
- Los *procesos* matemáticos que describen lo que es necesario hacer para conectar el contexto del problema con la Matemática que está implícita en él y así resolverlo, y las capacidades que subyacen a esos procesos.
- Los *contextos* en los cuales los ítems de evaluación se sitúan.

El marco de Matemática en PISA 2012 garantiza que las actividades propuestas en la evaluación reflejen una gama de contenidos, procesos y contextos que efectivamente ponen en práctica las dimensiones de

¹ Entre los instrumentos de evaluación que han sido elaborados para este ciclo 2012 por PISA se encuentra una prueba de Matemática con soporte informático. Uruguay no participa en esta área de evaluación pero si lo hace en la Prueba de Resolución de Problemas que también es con soporte informático.

la definición de la competencia matemática. Son varias las preguntas que sustentan esta definición de *competencia matemática* en la evaluación PISA 2012:

- ¿Qué conocimiento del contenido matemático se puede esperar de las personas en general y de los estudiantes de 15 años de edad en particular?
- ¿Qué procesos ponen en marcha los individuos comprometidos cuando resuelven problemas de contenido matemático, y qué capacidades esperamos que los individuos sean capaces de demostrar cuando aumenta el nivel de competencia matemática?
- ¿En qué contextos la competencia matemática puede ser observada y evaluada?

3.1 Contenido Matemático

Para los ciudadanos del mundo actual es importante la comprensión del contenido matemático y la habilidad de aplicarlo a la resolución de problemas significativos y contextualizados. Para resolver problemas e interpretar situaciones en diversos contextos de la vida es necesario recurrir a ciertos conocimientos matemáticos.

Las estructuras matemáticas se han desarrollado históricamente para entender e interpretar fenómenos naturales y sociales. En la enseñanza formal el currículum de Matemática suele organizarse en torno a ramas de contenido (ej. Número, Álgebra, Geometría) y listas detalladas de temas que ayudan a definir un currículum estructurado. Sin embargo, fuera de la clase de Matemática, una situación que surge no suele estar acompañado por un conjunto de reglas y fórmulas que muestren como debe enfrentarse. Por lo general requiere pensamiento más o menos creativo en la formulación matemática de la situación y con frecuencia el uso de ramas de conocimiento que involucran múltiples contenidos. En ocasiones la situación puede ser abordada de diferentes maneras recurriendo a diferentes conceptos matemáticos, procedimientos, datos o herramientas.

Dado que el objetivo de PISA es evaluar el grado de desarrollo de la *competencia matemática en los estudiantes de 15 años*, se propone una estructura para organizar los contenidos basada en fenómenos matemáticos que subyacen en grandes clases de problemas y que han motivado el desarrollo de determinados conceptos y procedimientos matemáticos. Por ejemplo, fenómenos matemáticos como los de cambio y relaciones e incertidumbre subyacen en muchas situaciones que ocurren comúnmente, por lo que se han desarrollado estrategias y herramientas matemáticas para analizarlos. Esta organización de contenido no es nueva, como se ejemplifica en dos conocidas publicaciones: *Sobre los Hombros de Gigantes* (Steen, 1990) y *Matemática: La Ciencia de los patrones* (Devlin, 1994).

Por lo tanto, para el marco PISA 2012 fue seleccionado un conjunto de *categorías de contenido* que reflejan la variedad de fenómenos matemáticos subyacentes, en consonancia con las categorías utilizadas para estudios previos de PISA.

La siguiente lista de categorías de contenido es utilizada en PISA 2012 para cumplir con los requerimientos del desarrollo histórico, la cobertura del dominio de Matemática y los fenómenos subyacentes que generan el desarrollo de los ejes principales del currículum escolar. Estas cuatro categorías caracterizan el rango de contenido matemático que es el centro de la disciplina e ilustran las amplias áreas de contenido que guían el desarrollo de las actividades de prueba de PISA 2012.

- Cambio y relaciones
- Espacio y forma
- Cantidad
- Incertidumbre y datos

Mientras que la clasificación por categorías de contenido es indispensable tanto para el desarrollo y la selección de las preguntas de la evaluación como para informar los resultados del estudio, es importante notar que algunos tópicos específicos de contenido pueden materializarse en más de una de las categorías. Por ejemplo, un ítem aplicado en una de las primeras ediciones de PISA llamado “*Las Pizzas*” (ver Apéndice II) propone determinar cuál de dos pizzas redondas, con diferentes diámetros y diferentes precios pero el mismo grosor, tiene el precio más conveniente. Este ítem aborda distintas áreas de contenido Matemático tales como geometría, pues refiere a dos círculos; su solución implica cálculos aritméticos en términos de precios, razonamiento proporcional y relación entre variables asociadas a la superficie y el costo de cada pizza. Claramente, por referirse a figuras geométricas, éste ítem podría haber sido clasificado como un ítem de *Espacio y forma*. Sin embargo este ítem fue clasificado en la categoría *Cambios y relaciones* ya que la clave del problema radica en que los estudiantes sean capaces de relacionar las áreas de las dos pizzas que tienen distinto diámetro y su relación con el precio, lo que implica razonamiento proporcional.

A continuación se presentan, en primer lugar, las descripciones de cada categoría de contenido y su importancia para resolver problemas significativos, seguido de definiciones más específicas del tipo de temas que se consideraron apropiados para incluir en una evaluación de *competencia matemática* a estudiantes de 15 años. Estos temas específicos reflejan los acuerdos encontrados a partir de las expectativas de los países participantes en la evaluación, así como de ciertas jurisdicciones educativas. Los estándares examinados para identificar estos contenidos son evidencia no solo de lo que se enseña en una clase de Matemática en los distintos países sino también indicadores de lo que los países

consideran conocimientos y habilidades importantes para la formación de estudiantes de esta edad como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. A su vez, se ejemplifican tanto las áreas de contenido como las distintas categorías de procesos cognitivos a través de la presentación de actividades aplicadas en ciclos anteriores de PISA. Estas pertenecen al conjunto de actividades que luego de ser aplicadas en el ciclo 2003, en que Matemática fue foco de la evaluación, se hicieron públicas para ejemplificar el marco conceptual y la escala de niveles de desempeño que el estudio generó. Las actividades utilizadas en esta publicación son: *Las Pizzas*, *Basura*, *Concierto de rock*, *Caminar* y *Carpintero*².

Cambio y relaciones

El mundo a nuestro alrededor muestra múltiples relaciones temporales y permanentes entre objetos y circunstancias, donde ocurren cambios entre sistemas de objetos interrelacionados o en circunstancias en que los elementos influyen unos con otros. En muchos casos estos cambios ocurren con el tiempo, y en otros casos un cambio en un objeto o cantidad está relacionado con cambios en otro. Siendo más literal, *cambio y relaciones*, implica tipos fundamentales de cambios y el reconocimiento de cuándo ocurren para utilizar modelos matemáticos adecuados para describirlos y predecirlos. Matemáticamente esto significa modelizar el cambio y las relaciones con funciones apropiadas, así como la creación, interpretación y traducción de representaciones simbólicas y gráficas de las relaciones.

Cambio y relaciones son evidentes en diversos entornos como crecimiento de organismos, música, ciclo de las estaciones, patrones del clima y condiciones económicas, entre otras. Aspectos de los contenidos matemáticos tradicionales sobre funciones y álgebra, incluyendo expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones, tablas y representaciones gráficas, son esenciales en la descripción, modelización e interpretación de los fenómenos de cambio. La actividad *Caminar* contiene dos preguntas que ejemplifican las categorías de *Cambio y Relaciones* ya que el foco se centra en relaciones algebraicas entre dos variables. Los estudiantes tienen que usar una fórmula que relaciona el largo de un paso con el número de pasos por minuto —fórmula expresada algebraicamente— para determinar el largo de un paso en una pregunta y la velocidad de la caminata en la otra. Representaciones de los datos y relaciones descritas usando estadística también suelen ser aplicadas para describir e interpretar cambios y relaciones, y una base sólida en los fundamentos de número y unidades es también esencial para definir

² Los ítemes *Caminar* y *Carpintero* con su correspondiente análisis están disponibles en: ANEP, Gerencia de Investigación y Evaluación; (2004). *La evaluación de la Cultura Matemática en PISA 2003. Marco conceptual y actividades de las pruebas*, 24, 30-32.

e interpretar *Cambios y relaciones*. Algunas relaciones interesantes surgen entre las magnitudes de figuras geométricas, tales como la forma en que variaciones en el perímetro de una familia de figuras puede relacionarse con variaciones en su área, o las relaciones entre las longitudes de los lados de un triángulo.

Espacio y forma

Espacio y forma abarca una amplia gama de fenómenos que se encuentran en nuestro mundo visual: patrones, propiedades de objetos, posiciones y orientaciones, representaciones de objetos, codificación y decodificación de información visual, interacción dinámica con formas reales así como con representaciones. La Geometría actúa como base esencial para *Espacio y forma*, pero la categoría se extiende más allá de la geometría tradicional en cuanto al contenido, significado y método, a partir de elementos de otras áreas de la Matemática como la visualización espacial, la medición y el álgebra.

La *competencia matemática* en el área de *Espacio y forma* implica una serie de actividades tales como la comprensión de la representación en perspectiva, por ejemplo en pinturas, creación y lectura de mapas, transformación de figuras usando tecnología, interpretación de escenas tridimensionales desde varios puntos de vista, y construcción de representaciones de figuras. La actividad de PISA, *Carpintero*, pertenece a esta categoría ya que trata de otro aspecto clave de *Espacio y forma*: propiedades de las figuras. En este ítem de múltiple opción compleja, a los estudiantes se les presentan cuatro diseños diferentes para el borde de una jardinera y se pregunta cuál(es) pueden fabricarse con determinada cantidad de listón de madera. Este ítem requiere de la aplicación de conocimientos geométricos y de razonamiento espacial. Se da suficiente información para permitir el cálculo directo del perímetro de tres diseños, aunque, para un diseño la información es incompleta, por lo que los estudiantes necesitan usar habilidades de razonamiento geométrico para tomar decisiones.

Cantidad

La noción de *Cantidad* abarca la cuantificación de los atributos de los objetos, sus relaciones y la comprensión de las distintas representaciones de las cuantificaciones. La cuantificación implica entender las mediciones, conteos, unidades, tendencias y patrones. Los aspectos del razonamiento cuantitativo, como la esencia del número, múltiples representaciones de los números, la elegancia del cálculo, el cálculo mental, la estimación, y la evaluación de la pertinencia de los resultados, son la esencia de la *competencia matemática* en relación a la categoría de contenido *Cantidad*.

La cuantificación es un método clave para describir y medir un vasto conjunto de atributos del mundo. Permite modelizar situaciones, examinar y cuantificar cambios y relaciones, describir y manipular figuras y evaluar probabilidades. Por lo tanto la *competencia matemática* en el área de *Cantidad* aplica los

conocimientos de número y operaciones numéricas en una amplia variedad de contextos. El ítem de PISA, *Concierto de Rock*, (ver Apéndice 2) es un ejemplo para la categoría *Cantidad*. En este ítem se requiere estimar el número total de personas asistentes a un concierto, dadas las dimensiones del campo rectangular reservado para el evento. Si bien este ítem también tiene algunos elementos que lo relacionan con la categoría *Espacio y forma*, su demanda principal proviene de postular un área para cada persona y luego multiplicar por el número de personas dado en cada opción proporcionada, y comparar el resultado con las condiciones aportadas en la pregunta. Como alternativa, dado que este ítem es de múltiple opción, los estudiantes pueden trabajar al revés usando el área del campo y cada opción de respuesta para calcular el correspondiente espacio por persona, determinando cual proporciona el resultado más razonable. Ya que las opciones de respuesta están dadas en términos de miles de personas este ítem también hace un llamamiento a las destrezas de los estudiantes en estimación.

Incertidumbre y datos

En ciencia, tecnología y en la vida diaria, la incertidumbre es un hecho. La *incertidumbre* es por lo tanto un fenómeno en el corazón del análisis matemático de varias situaciones problemáticas y la teoría de las probabilidades y estadística, así como las técnicas de representación y descripción de datos, se han desarrollado para poder abordarlas. El contenido de esta categoría incluye un sentido de la cuantificación y la explicación de las variaciones, reconocimiento del error en la medición y conocimiento acerca de probabilidades. También incluye la formación, interpretación, y evaluación de conclusiones extraídas de situaciones donde la incertidumbre es central. La presentación e interpretación de datos son también conceptos claves en esta categoría.

Hay incertidumbre en las predicciones científicas, resultado de encuestas, predicciones meteorológicas y modelos económicos. Hay variación en procesos de fabricación, resultado de pruebas, resultado de encuestas y el azar es fundamental para muchas actividades recreativas. Las áreas curriculares tradicionales de probabilidad y estadística proporcionan un método formal de describir, modelizar e interpretar fenómenos de incertidumbre y de hacer inferencias. En suma, el conocimiento del número y de aspectos del álgebra, como gráficos y representaciones simbólicas, contribuyen a la selección de problemas en esta categoría de contenido. El ítem liberado de PISA, *Basura* (ver Apéndice 2), se clasifica dentro de la categoría *Incertidumbre*. Este ítem requiere que los alumnos examinen los datos presentados en una tabla y expliquen por qué una gráfica de barras no es adecuada para representarlos.

Lista de Contenidos de la evaluación de la competencia matemática.

Como evaluación de *competencia matemática*, PISA se esfuerza por identificar los niveles y tipos de matemática que son apropiados para estudiantes de 15 años, en camino de convertirse en ciudadanos

constructivos, comprometidos y reflexivos, capaces de juzgar y tomar decisiones bien fundadas. También se da el caso de que PISA, si bien no se diseña para ser una evaluación de plan de estudios, se esfuerza por reflejar la matemática que los estudiantes probablemente han tenido la oportunidad de aprender en las aulas a la etapa de 15 años de edad.

Con la mirada puesta en el desarrollo de una evaluación que es a la vez con visión de futuro, pero que refleja las matemáticas que los estudiantes de 15 años probablemente han tenido la oportunidad de aprender, se realizaron análisis de una muestra de los estándares en Matemática de 12 países. Se buscó determinar tanto, lo que está siendo enseñado en las aulas, como lo que los países consideran importante como preparación para los estudiantes cuando se acercan al ingreso al mercado laboral o a la admisión a una institución de educación superior. Sobre la base de elementos comunes identificados en estos análisis, junto con el juicio de expertos internacionales en Matemática, se ha seleccionado el contenido considerado apropiado para ser incluido en la evaluación de *competencia matemática* para estudiantes de 15 años en PISA 2012 que se describe a continuación.

Las cuatro categorías de contenido de *Cambio y relaciones, Espacio y forma, Cantidad, e Incertidumbre y datos* son base para la identificación de esta gama de temas, sin embargo no hay una correspondencia uno a uno de los temas y estas categorías. Por ejemplo, proporcionalidad entra en juego en contextos tan variados como conversiones de medidas, funciones lineales, cálculo de probabilidades y estudio de la longitud de los lados de figuras semejantes. La lista de temas que figuran a continuación refleja la importancia de muchos de estos conceptos para las cuatro categorías de contenido y refuerza la coherencia de la Matemática como disciplina.

<i>Funciones</i>	El concepto de función, destacando pero no limitado a las funciones lineales, sus propiedades y una variedad de descripciones y representaciones de las mismas. Las representaciones comúnmente utilizadas son verbales, simbólicas, tabulares y gráficas.
<i>Expresiones algebraicas</i>	La interpretación verbal y manipulación con expresiones algebraicas, con números, símbolos, operaciones aritméticas, potencias y raíces simples.
<i>Ecuaciones</i>	Ecuaciones lineales y afines, ecuaciones sencillas de segundo grado y métodos de resolución analíticos y no analíticos.
<i>Sistema de coordenadas</i>	Representación y descripción de datos, posición y relaciones.
<i>Relaciones intra y entre objetos geométricos en dos y tres dimensiones</i>	Las relaciones como conexiones algebraicas entre los elementos de las figuras (por ejemplo, el Teorema de Pitágoras como definición de las relaciones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo), posición relativa, semejanza y congruencia, relaciones dinámicas que implican transformaciones y movimientos de los objetos, así como correspondencia entre objetos de dos y tres dimensiones.
<i>Medida geométrica</i>	Cuantificación de las características de y entre los objetos, como medida de ángulos, distancias, longitudes, perímetros, área y volumen.
<i>Números y unidades</i>	Conceptos, representaciones y sistemas numéricos, incluyendo propiedades de los números enteros y racionales, aspectos relevantes de los números irracionales, así como cantidades y unidades referidas a fenómenos como el tiempo, dinero, peso, temperatura, distancia, área y volumen, cantidades derivadas y su descripción numérica.
<i>Operaciones aritméticas</i>	La naturaleza y propiedades de estas operaciones y las convenciones relativas a la notación.
<i>Porcentajes, razones y proporciones</i>	Descripción numérica de magnitud relativa y la aplicación de proporciones y razón de proporcionalidad para resolver problemas.

<i>Estimación</i>	Aproximación de cantidades y expresiones numéricas, incluyendo cifras significativas y redondeo.
<i>Recolección de datos y representaciones</i>	La naturaleza, origen y recopilación de diversos tipos de datos y las diferentes formas de representarlos.
<i>Variabilidad de datos y su descripción</i>	Conceptos como variabilidad, distribución, y tendencia central de conjuntos de datos y maneras de describir e interpretar estos en términos cuantitativos.
<i>Muestras y muestreo</i>	Conceptos de muestreo y de poblaciones de datos, incluyendo inferencias simples basadas en propiedades de las muestras.
<i>Azar y probabilidad</i>	Noción de eventos aleatorios, variación aleatoria y su representación, azar y frecuencia de eventos, y aspectos básicos del concepto de probabilidad.

3.2 Procesos Matemáticos

La definición de la *competencia matemática* se refiere a la capacidad del individuo para *formular, usar e interpretar* matemática. Este lenguaje proporciona una estructura útil y significativa para la organización de los procesos matemáticos que describen lo que hacen los individuos para conectar el contexto de un problema con la Matemática que está implícita en él con el objetivo de resolver el problema. La evaluación PISA 2012 en Matemática, por primera vez, tendrá la posibilidad de informar los resultados en términos del grado de desarrollo de estos procesos matemáticos. Esta característica homogeneiza todas las áreas de la evaluación pues tanto Ciencias como Lectura brindan sus resultados enfocados hacia los procesos cognitivos mientras que Matemática lo hizo en ciclos anteriores de acuerdo a los contenidos matemáticos que las actividades abordan. Se espera que esta estructura proporcione categorías útiles y pertinentes para la comunicación de los resultados. Las categorías que se utilizarán para la presentación de informes son las siguientes:

- Formular situaciones matemáticamente
- Emplear conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemáticos
- Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos

Los resultados del estudio PISA para el proceso *formular*, indicarán el grado de eficacia con que los estudiantes logran identificar oportunidades de usar Matemática en situaciones problema y luego proporcionar la estructura que permite la traducción y formulación de esos problemas contextualizados en una forma matemática.

En el proceso *emplear*, revelarán qué tan bien pueden realizar cálculos, manipulaciones y aplicar los conceptos y hechos que conocen para llegar a una solución matemática.

Para el proceso *interpretar*, los datos indicarán el grado de eficacia con que los estudiantes son capaces de reflexionar sobre las conclusiones o soluciones matemáticas, interpretar éstos en el contexto auténtico de un problema y determinar si los resultados o conclusiones son razonables.

La capacidad de los estudiantes para la aplicación de la Matemática en problemas contextualizados depende de habilidades inherentes a los tres procesos cognitivos y una comprensión de su eficacia en cada categoría es de utilidad para informar tanto a nivel de discusiones de política educativa como a nivel de decisiones que se toman en el aula.

Formular situaciones matemáticamente

La palabra *formular* en la definición de *competencia matemática* se refiere a la capacidad del individuo de reconocer e identificar las oportunidades de utilizar Matemática y proporcionar la estructura matemática a un problema presentado en forma contextualizada. En el proceso de *formular* situaciones matemáticamente, los individuos determinan de dónde pueden extraer lo esencial de la disciplina para analizar, configurar y resolver el problema. Traducen de un ambiente del mundo real al dominio de las matemáticas y le dan estructura matemática, representación y especificidad al problema. Razonan y dan sentido a las limitaciones e hipótesis del problema.

Específicamente, este proceso de *formular situaciones matemáticamente* incluye actividades cognitivas como las siguientes:

- Identificar los aspectos matemáticos de un problema ubicado en un contexto auténtico e identificar las variables significativas.
- Reconocer la estructura matemática (incluyendo regularidades, relaciones y patrones) en los problemas.
- Simplificar una situación o problema con el fin de hacerlo susceptible de un análisis matemático.
- Identificar limitaciones e hipótesis detrás de cualquier modelo matemático y simplificaciones obtenidas del contexto.

- Representar una situación matemáticamente, utilizando variables apropiadas, símbolos, diagramas y modelos.
- Representar un problema de una manera diferente, incluyendo su organización de acuerdo a conceptos matemáticos y realizando suposiciones apropiadas.
- Comprender las relaciones entre el lenguaje específico del contexto del problema y el lenguaje formal y simbólico necesarios para representarlo matemáticamente.
- Traducir un problema a lenguaje matemático o a una representación, es decir a un modelo matemático.
- Reconocer los aspectos de un problema que se corresponden con problemas conocidos, o conceptos matemáticos, hechos, o procedimientos.
- Usar tecnología para representar una relación matemática inherente a un problema contextualizado³.

La actividad de evaluación, *Las Pizzas* corresponde en forma más directa a la habilidad de los estudiantes para formular una situación matemáticamente. Si bien es cierto que los estudiantes también necesitarán realizar cálculos para resolver el problema y dar sentido a los resultados, el verdadero desafío cognitivo de este ítem radica en ser capaces de formular un modelo matemático que dé cabida al concepto de mejor relación calidad- precio. La relación entre la cantidad de pizza y la cantidad de dinero se refleja tomando como modelo el costo por unidad de área. El ítem de PISA *Concierto de rock* es otro ejemplo de una actividad que se basa sobre todo en las habilidades de los estudiantes de formular una situación matemáticamente, ya que pide dar sentido a la información contextual proporcionada (ej. tamaño y forma del campo, el hecho de que el lugar del evento está lleno, y de que los fans están de pie) y traducir esa información a una forma matemática útil con el fin de estimar el número de personas asistentes al concierto.

Usar conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento

La palabra *usar* en la definición de la *competencia matemática* se refiere a la capacidad de los individuos de emplear y aplicar conceptos matemáticos, hechos, procedimientos, y razonamiento para resolver problemas. En este proceso los individuos realizan los procedimientos matemáticos necesarios para obtener resultados y encontrar una solución matemática (ej. realizando cálculos, resolviendo ecuaciones,

³ El uso de tecnología se refiere en mayor medida a la requerida en la evaluación en Matemática por computadora de la que Uruguay no participa en este ciclo.

haciendo deducciones lógicas, manipulando expresiones simbólicas, extrayendo información de tablas y gráficos, representando figuras del espacio y analizando datos). Trabajan con un modelo de la situación del problema, lo ajustan, establecen regularidades, identifican conexiones y crean argumentos matemáticos.

Específicamente, este proceso de *usar conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento* incluye actividades cognitivas como:

- Diseñar e implementar estrategias.
- Usar procedimientos, lenguaje simbólico, formal y técnico.
- Usar herramientas matemáticas, incluyendo tecnología.
- Aplicar algoritmos y reglas matemáticas.
- Manipular números, datos e información, gráficos y estadísticas, expresiones algebraicas, ecuaciones y representaciones geométricas.
- Realizar diagramas matemáticos, gráficos, construcciones y extraer información de éstos.
- Usar diferentes representaciones.
- Ajustar y perfeccionar modelos matemáticos.
- Realizar generalizaciones basadas en resultados de la aplicación de procedimientos matemáticos.

El ítem Caminar es un ejemplo de actividad que depende en mayor medida de las habilidades de los estudiantes para *usar conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento*. Las dos preguntas de esta unidad dependen del uso de un determinado modelo, dado en una fórmula, para determinar tanto el largo del paso (Pregunta 1) como la velocidad de la caminata (Pregunta 2). Ambas preguntas han sido expresadas de modo que está dada la estructura matemática y los estudiantes necesitan manipular una expresión algebraica y realizar cálculos para obtener la respuesta. Del mismo modo, el ítem Carpintero se basa en gran medida en que los estudiantes *empleen conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento*. Los estudiantes necesitan diseñar una estrategia para encontrar el perímetro de cada una de las jardineras, de las que se proporciona una representación, cuando son observadas desde arriba, luego requiere comparar el resultado obtenido con la cantidad de madera disponible.

Interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos

El proceso *interpretar* utilizado en la definición de *competencia matemática* en PISA se centra en las habilidades de los individuos para reflexionar sobre soluciones matemáticas, resultados o conclusiones e

interpretarlos en el contexto de problemas auténticos. Esto implica la decodificación de soluciones matemáticas o volver a razonar en el contexto del problema y determinar si los resultados son razonables y plausibles en él. En ocasiones implica también construir y comunicar explicaciones y argumentos en el contexto del problema, lo que se refleja tanto en el proceso de modelización como en sus resultados.

Específicamente, este proceso de *interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos* incluye actividades como:

- Evaluar la pertinencia de una solución matemática en el contexto de un problema auténtico.
- Comprender cómo el mundo real impacta en resultados de un procedimiento matemático con el fin de hacer juicios contextualizados sobre cómo los resultados deberían ajustarse o aplicarse.
- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos, explicar y justificar resultados, en términos del contexto de un problema.
- Comunicar los pasos seguidos para encontrar una solución y su significado, tomando en consideración el contexto del problema,
- Entender el alcance y los límites de conceptos y soluciones matemáticas.
- Criticar e identificar los límites del modelo utilizado para resolver un problema.

El ítem de PISA, Basura, corresponde claramente a la capacidad de *interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos*. El objetivo de este ítem es evaluar la eficacia de un gráfico de barras para representar datos sobre tiempo de descomposición de algunos tipos de residuos. El ítem implica razonamiento acerca de los datos presentados, pensar matemáticamente acerca de la relación entre los datos y su representación y finalmente evaluar el resultado. El joven debe reconocer que esos datos serían difíciles de presentar en forma eficaz en un gráfico de barras y proporcionar una razón de por qué esa visualización es inadecuada para mostrarlos.

Capacidades Matemáticas Fundamentales Subyacentes en los Procesos Matemáticos

Una década de experiencia en el desarrollo de las actividades de prueba de PISA y en el análisis de las formas en que los estudiantes responden a los ítems han revelado que hay una serie de *capacidades matemáticas fundamentales* que subyacen en cada uno de estos procesos reportados y que también sustentan en la práctica la *competencia matemática*. La obra de Mogens Niss⁴ y sus colegas daneses (Niss,

⁴ Dr Mogens Niss de la Universidad de Roskilde, Dinamarca

1999, 2003) identifican siete capacidades como fundamentales para el uso instrumental de la Matemática que fueron publicadas en el marco del área para el ciclo 2003.

Existe un amplio consenso sobre la necesidad de identificar un conjunto de capacidades matemáticas generales para complementar el papel que cumple el conocimiento de contenido matemático específico en el aprendizaje de Matemática. Las capacidades esenciales de la *competencia matemática* que se utilizan en este marco se ilustran en la figura 2.

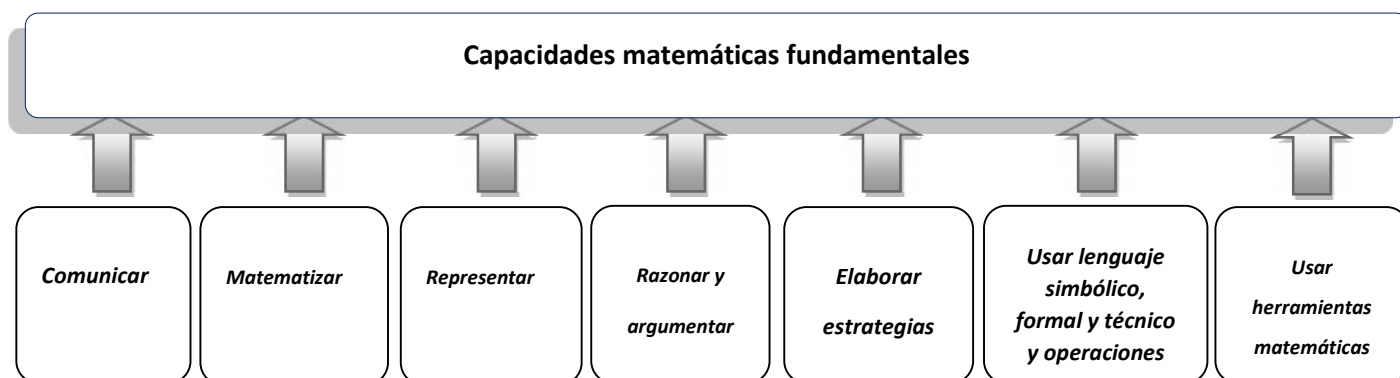


Figura 2. Las siete capacidades matemáticas fundamentales

Esas capacidades están presentes, en distintos grados, en cada una de las tres categorías de procesos desarrollados en el punto anterior. Las formas en que estas capacidades se manifiestan en las tres categorías de procesos se describen en el apéndice I y además se proporciona en cada caso un ejemplo ilustrativo con la descripción de cómo las capacidades pueden ser activadas por los estudiantes resolviendo ese problema en particular.

Mientras que las siete capacidades matemáticas fundamentales son aplicables a la *formulación de situaciones matemáticas*, algunas están más estrechamente asociadas con este proceso como la comunicación, la matematización, la representación, el razonamiento y la argumentación, la elaboración de estrategias, y el uso de un lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

El proceso de *usar conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento* se caracteriza por aquellos aspectos del trabajo matemático que implican que el individuo aplique su conocimiento y comprensión para obtener resultados y resolver problemas. Específicamente, caracterizan este proceso matemático, tareas que se centran en actividades como el cálculo, la manipulación de modelos matemáticos o ecuaciones, lectura de información de un gráfico o tabla. Las capacidades que más se asocian con este proceso en particular son la representación, el razonamiento y la argumentación, la elaboración de estrategias, uso de lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, y el uso de herramientas matemáticas.

El proceso de *interpretación, aplicación, y evaluación de resultados matemáticos* se caracteriza por aquellos aspectos del trabajo matemático que traducen soluciones matemáticas o razonamientos y los relacionan con el contexto del problema, determinan si los resultados son razonables y si tienen sentido en el contexto del problema. Mientras que las siete de las capacidades fundamentales pueden ser aplicables a esta categoría de procesos, las capacidades que tienden a estar más estrechamente asociadas con este proceso son la comunicación, la matematización, la representación y el razonamiento y la argumentación.

La forma en que los individuos desarrollan estas capacidades en cada categoría de procesos cognitivos se describe a continuación:

Comunicar:

Es importante conocer aspectos relativos a la recepción de la información para saber cómo los individuos perciben la existencia de un desafío y son estimulados a reconocer y comprender una situación problemática. La lectura, la decodificación y el dar sentido a afirmaciones, preguntas, tareas, objetos o imágenes, permiten al individuo crear un modelo de la situación, lo cual es un paso importante para comprender, clarificar y *formular* el problema en términos matemáticos.

Si se proporciona una representación visual como parte del estímulo, deberán ser capaces de vincular la información dada en el texto del ítem con la representación gráfica. Luego se requerirá articular una solución y a veces mostrar el trabajo realizado para alcanzar la solución, y en algunos casos expresar los resultados matemáticos intermedios.

Una vez que un individuo ha interpretado y evaluado la pertinencia de una solución matemática, podría esperarse que presente la solución, una explicación o justificación del mismo. Esto implica construir y comunicar explicaciones y argumentos en el contexto del problema, reflexionar y posiblemente, justificar o refutar una solución. También incluye la identificación y la crítica de los límites, ya sea del modelo utilizado para resolver el problema, o de la solución matemática en el contexto del problema.

Matematizar:

Matematizar implica transformar un problema definido en el mundo real a una forma matemática y también interpretar una solución matemática o un modelo matemático en relación con el contexto de un problema. La exigencia de matematización se produce, por ejemplo, cuando un individuo necesita traducir directamente desde una situación intra matemática como el caso de estructurar y

conceptualizar la situación de una manera ilustrativa o identificar y seleccionar las variables relevantes para el contexto. La creación de un modelo matemático puede surgir en situaciones que son claras y explícitas tanto como en escenarios donde hay muchos supuestos, variables, relaciones y limitaciones que necesitan ser identificadas y tenidas en cuenta.

Si un problema se presenta a los individuos en una forma manifiestamente matemática, requiriendo solamente la aplicación de conceptos matemáticos, hechos o procedimientos, es posible que requiera menor demanda de matematización. Puede ser necesario activar este proceso al conceptualizar el problema matemáticamente o al interpretar la solución dentro del contexto del problema original. Éste último aspecto es la esencia de una de las categorías de procesos cognitivos contemplados en este marco: *interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos*. Interpretación y evaluación de un resultado matemático puede implicar tomar en consideración las consecuencias de una solución matemática en un contexto auténtico y hacer juicios contextualizados acerca de cómo los resultados necesitan ser ajustados o aplicados. Esto implica comprender el alcance y los límites de la solución matemática y tenerlo en cuenta cuando se aplica la solución al problema en el contexto dado.

Representar:

Enfrentar un problema en un contexto auténtico que es susceptible de matematización implica representar ese problema matemáticamente. Se puede requerir seleccionar o elaborar una representación matemática _ que puede ser a través de ecuaciones, fórmulas, gráficos, tablas, diagramas, imágenes, descripciones textuales, etc. _ para captar y describir las características matemáticas de una situación.

Al usar conceptos, hechos, procedimientos, y razonamiento para resolver un problema, habrá una amplia gama de representaciones matemáticas a las que habrá que dar sentido, utilizar y relacionarlas mientras se interactúa con el problema.

A su vez, también los resultados matemáticos se pueden presentar en una variedad de formatos, como ecuaciones, fórmulas, o representaciones gráficas y es necesario interpretar dichos resultados en relación con una situación o utilizar, comparar y evaluar dos o más representaciones en relación con esa situación. En ocasiones es necesario crear una representación de un resultado matemático como parte de la presentación de la solución o explicar o justificar diferentes representaciones de la solución de un problema explicando los límites o restricciones de la solución matemática.

Razonar y argumentar:

Los estudiantes tendrán que emplear procesos de pensamiento lógico que den sentido a una situación y determinar cuanto mejor es representar esa situación matemáticamente. También pueden enfrentarse a explicar o dar una justificación de la representación que han identificado o elaborado así como de los procesos y procedimientos que han utilizado. A su vez necesitarán emplear procesos de pensamiento lógico para determinar qué conceptos, hechos y procedimientos usar para hallar la solución matemática del problema. Razonar implica reflexionar sobre como conectar diferentes partes de la información para llegar a una solución, analizar la información para seguir o crear un argumento de varios pasos, conectar, establecer vínculos o respetar restricciones entre varias variables, razonar sobre las fuentes de información relacionadas, o hacer generalizaciones y combinar múltiples elementos de información.

Interpretar, aplicar y evaluar los resultados matemáticos implica que los individuos sean capaces de pensar clara y lógicamente acerca de la relación entre un resultado matemático y el contexto en el cual se encuentra el problema a resolver. Tanto el razonamiento como la argumentación entran en juego al reflexionar sobre las soluciones matemáticas y crear explicaciones y argumentaciones que apoyan o refutan una solución matemática de un problema contextualizado.

Elaborar estrategias:

Al reconocer la existencia de un problema para resolver y mediante la identificación o creación de una representación matemática de la situación, las personas elaboran una estrategia para llegar a resolverlo. Esta capacidad se caracteriza por la selección o diseño de un plan para usar matemática al resolver problemas. Para esto puede ser necesario participar en un proceso sistemático para utilizar información relevante dada y descubrir información implícita de modo de alcanzar una solución matemática, conclusión o generalización. También puede demandar activar mecanismos de control, eficaces y sostenidos, a través de un procedimiento de varios pasos.

El proceso de *interpretación, aplicación y evaluación de resultados matemáticos* involucra elaborar una estrategia para guiar el trabajo, interpretar, evaluar y validar la solución matemática de un problema contextualizado. Es probable que se requiera elaborar un mecanismo para evaluar la solución, basados en diferentes escenarios o restricciones impuestas por el mismo contexto del problema.

Utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones:

Al traducir y dotar de estructura matemática a una situación problema, las personas necesitan usar variables apropiadas, símbolos, diagramas, y modelos. Para lograr esto es importante que entiendan la relación entre el lenguaje del problema y el lenguaje formal y/o lenguaje simbólico necesario para representarlo matemáticamente.

Para llegar a la solución matemática, los estudiantes necesitan entender, manipular y hacer uso de expresiones simbólicas—aritméticas y algebraicas—regidas por reglas y convenciones matemáticas. Además implica entender y utilizar construcciones formales basadas en definiciones, reglas y aplicar algoritmos. El uso del lenguaje simbólico, formal y técnico y de las operaciones, puede incluir ciertas actividades como la ejecución de algoritmos aritméticos fundamentales, el empleo y manipulación de símbolos matemáticos formales o relaciones funcionales, y el uso de fórmulas, definiciones, convenciones y procedimientos.

A la hora de *interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos* los individuos necesitarán entender las variables, símbolos, gráficos, y diagramas que pueden utilizar para comunicar la solución matemática. Es importante que comprendan la relación entre el contexto del problema y la representación de la solución matemática para que puedan tomar decisiones apropiadas para interpretar la solución en el contexto y evaluar la pertinencia y las posibles limitaciones de la solución

Utilizar herramientas matemáticas:

En ciertas instancias, puede ser que determinadas herramientas matemáticas, tales como un instrumento de medición, o una calculadora gráfica o una hoja de cálculo, sean útiles para el reconocimiento de una estructura matemática o para describir una relación matemática. Si bien el estudio PISA 2012 proporcionará oportunidades de usar herramientas matemáticas para responder a las actividades de prueba, es la componente opcional basada en computadora para la evaluación de la competencia Matemática la que proporcionará aún más oportunidades en ese sentido. Las herramientas matemáticas disponibles para la prueba en formato papel, son instrumentos de medición y calculadoras. Esta capacidad implica conocer y ser capaz de hacer uso de varias ayudas y herramientas que pueden asistir en la implementación de procesos y procedimientos para determinar soluciones matemáticas. También implica saber el momento y la situación apropiada para hacer uso de una herramienta, y conocer sus limitaciones.

Una discusión detallada de las capacidades matemáticas fundamentales y en particular su relación con los niveles de desempeño en Matemática y la dificultad de las tareas de evaluación es proporcionada en anexos de este documento.

3.3 Contextos

Un aspecto importante de la concepción de *competencia matemática* en PISA es que se tiene en cuenta que esta área tiene aplicaciones para resolver un conjunto de problemas que se presentan en variados contextos. El contexto es el aspecto del mundo del individuo en el cual los problemas se ubican. La elección de estrategias y representaciones matemáticas apropiadas depende a menudo del contexto en el cual surge el problema. Para el estudio PISA son utilizados una amplia gama de contextos auténticos lo que ofrece la posibilidad de que los estudiantes se enfrenten a las más variadas situaciones y se conecten con una amplia gama de intereses individuales propios del siglo XXI.

A los efectos del marco de evaluación de la *competencia matemática* de PISA 2012, han sido definidas cuatro categorías de contexto:

- *Personal* – Problemas planteados sobre actividades relacionadas con uno mismo, la propia familia, o el propio grupo de pares y la percepción del individuo de la importancia directa de las situaciones problemáticas en ellos. Los tipos de contextos que pueden ser considerados personales incluyen aquellos relativos a la preparación de alimentos, compras, juegos, salud individual, transporte personal, deportes, viajes y finanzas personales. El ítem Caminar muestra dos actividades correspondientes a este contexto. La primera implica la aplicación de una fórmula matemática para determinar la longitud del paso de una persona, mientras que la segunda requiere la aplicación de una fórmula para determinar la velocidad al caminar de otra persona.
- *Ocupacional* – Los problemas ubicados en un contexto ocupacional se centran en el mundo del trabajo. Los ítems clasificados de contexto ocupacional pueden incluir situaciones como medición, cálculo de costos y pedido de materiales para la construcción, nómina de sueldos y su contabilidad, control de calidad, inventarios, diseño y toma de decisiones relacionadas con el trabajo. Los contextos ocupacionales pueden relacionarse con cualquier nivel de mano de obra, desde el trabajo no calificado hasta los más altos niveles de trabajo profesional, sin olvidar que los contextos en este estudio no deben ser totalmente ajenos a jóvenes de 15 años. El ítem Carpintero se clasifica como ocupacional ya que se trata de la posibilidad de construir un borde con listón de madera alrededor de una jardinera.

- *Social* – Los problemas planteados en un contexto social se centran en la propia comunidad. Pueden incluir temas tales como sistemas de votación, transporte público, gobierno, políticas públicas, demografía, publicidad, estadísticas nacionales y económicas. Si bien los individuos están involucrados en todas estas cuestiones de una manera personal, en la categoría de contexto social, el foco del problema está en la perspectiva de la comunidad. El ítem Concierto de Rock es un ejemplo de un ítem clasificado como social ya que se sitúa en el nivel de la organización de un evento musical, aunque se basa en la experiencia personal de estar entre multitudes.
- *Científico* – Los problemas situados en un contexto científico se relacionan con la aplicación de la Matemática en la naturaleza y en temas relacionados con la ciencia y la tecnología. Determinados contextos pueden incluir áreas como tiempo y clima, ecología, medicina, ciencia espacial y genética. El ítem Basura es un ejemplo de un ítem ubicado en un contexto científico, ya que su enfoque está relacionado con el medio ambiente, y específicamente a los datos del tiempo de descomposición de ciertos elementos.

Los ítems de la evaluación PISA están organizados en unidades que comparten un mismo material de estímulo. Por lo tanto, suele suceder que todos los ítems de una misma unidad pertenezcan a la misma categoría de contexto. Las excepciones se presentan por ejemplo cuando el material de estímulo puede ser examinado desde un punto de vista personal en un ítem y desde un punto de vista social en otro.

Al caso poco usual de una actividad que implica solo construcciones matemáticas puras y no hace referencia a un contexto fuera de la disciplina se le asigna la categoría de contexto científico.

El uso de categorías de contexto permite una combinación de ellos que garantiza que la evaluación refleje una amplia gama de usos de la Matemática que van desde los usos personales diarios hasta las exigencias científicas de problemas globales. Además es importante mencionar que cada categoría de contexto se completa con ítems de evaluación de una amplia gama de dificultad. Teniendo en cuenta que el propósito principal de estas categorías de contextos es desafiar a los estudiantes a aplicar Matemática en variedad de problemas, cada categoría de contexto debe contribuir sustancialmente a la medición de la *competencia matemática*. Se pone especial cuidado en que la dificultad de los ítems de evaluación que representan una categoría de contexto no sean sistemáticamente más o menos difíciles que los de otra categoría.

En la identificación de los contextos que pueden ser relevantes, es importante tener en cuenta que un propósito del estudio es medir el uso de conocimientos de contenido matemático y la puesta en marcha de procesos y capacidades que los estudiantes han tenido oportunidad de desarrollar a los 15 años. Los

contextos de los ítemes de evaluación, por lo tanto, son seleccionados en función de la relación con los intereses de los estudiantes y sus vidas y con las exigencias que les corresponderá al ingresar a la sociedad como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. Los centros nacionales de cada uno de los países participantes en la evaluación tienen como uno de sus cometidos reflexionar y juzgar sobre el grado de importancia y de adecuación para la evaluación de estos contextos.

4. LA EVALUACIÓN DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN PISA 2012

En esta sección, se describe el enfoque adoptado para implementar los elementos del marco de Matemática para PISA 2012 desarrollados en las secciones anteriores. Incluye la estructura de la prueba, la forma en que se reportará sobre la competencia matemática que demuestran los jóvenes evaluados y las actitudes a ser investigadas que se vinculan con ella.

4.1 Estructura de la prueba de Matemática PISA 2012

Como se describió, de acuerdo con la definición de *competencia matemática*, los ítems de evaluación utilizados en el estudio PISA, son contextualizados e involucran la aplicación de conceptos matemáticos importantes, conocimientos y habilidades en un nivel adecuado para estudiantes de 15 años. El marco es utilizado para guiar la estructura y contenido del estudio, mientras que los instrumentos de la evaluación deben incluir ítems adecuados que reflejen los componentes del este marco de evaluación de la *competencia matemática*.

4.2 Distribución de los ítems según las dimensiones del marco y su dificultad.

Los ítems seleccionados para el estudio principal PISA 2012 se distribuyen en forma balanceada entre las cuatro categorías de contenido. Aproximadamente un 25% de las actividades de prueba corresponden a cada uno de las categorías: *Cambio y relaciones, Cantidad, Espacio y forma e Incertidumbre*.

Con respecto a los procesos cognitivos, la mitad de las actividades corresponden al proceso *usar conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemáticos* mientras que la otra mitad se reparte equitativamente entre los procesos *formular situaciones matemáticamente e interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos*.

Si se tienen en cuenta los contextos, hay una distribución homogénea del total de ítems entre cada una de las categorías de contexto definidas: personal, ocupacional, social y científico.

La evaluación PISA 2012 en Matemática incluye ítems con una amplia gama de dificultad que armonizan con la variedad de capacidades de los estudiantes de 15 años. Algunos ítems son un desafío para los estudiantes con mayor habilidad matemática mientras que otros son adecuados para los estudiantes con menor desarrollo de la habilidad en el área. Desde el punto de vista psicométrico, el estudio, que está diseñado para medir una cohorte de individuos, basa su construcción en el modelo de Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) de forma que hay una correspondencia entre la dificultad de los ítems de la prueba y la habilidad del respondente. En el piloto 2011 entre otras cosas, se estudia el ajuste de las

actividades al modelo, éste es uno de los aspectos que permiten decidir si la actividad será incluida en el conjunto de tareas de prueba del estudio principal.

En resumen, el objetivo de PISA en lo que respecta a la *competencia matemática* es desarrollar indicadores que muestren la eficacia con que los sistemas educativos de los países participantes están preparando a los estudiantes a utilizar Matemática en todos los aspectos personales, cívicos y profesionales de sus vidas, como parte de una ciudadanía constructiva, comprometida y reflexiva. Para ello, PISA ha desarrollado una definición de *competencia matemática*, un marco de evaluación que refleja las componentes importantes de esta definición y los instrumentos correspondientes. Los ítems de evaluación de Matemática desarrollados y seleccionados para ser incluidos en PISA 2012, basándose en esta definición y el marco, tienen la intención de reflejar un equilibrio entre los contenidos matemáticos relevantes, los procesos cognitivos y los contextos auténticos. Las actividades de prueba están destinadas a determinar en qué medida los estudiantes pueden usar lo que han aprendido en cada situación. Enfrentan a los estudiantes a usar lo que saben, activando procesos y aplicando las capacidades que poseen para resolver problemas que surgen de las experiencias cotidianas. La evaluación proporciona problemas en una variedad de formatos con énfasis en problemas auténticos donde los estudiantes deben hacer su propia reflexión.

4.3 Estructura del instrumento del estudio

El total de las actividades de matemática diseñadas para el ciclo 2012 de PISA proporcionan material para 270 minutos de trabajo. Éste material se distribuye en nueve grupos o bloques de ítems que representan 30 minutos de tiempo de prueba en esta área. Como ya se ha mencionado en otras publicaciones, los cuadernillos de prueba están organizados en bloques de tal forma que determinado conjunto de actividades (que poseen determinadas propiedades psicométricas) pertenecen a distintos cuadernillos por lo que no todos los estudiantes resuelven las mismas actividades y a su vez la resolución de cada ítem está asociada a su ubicación en el cuadernillo. Cada forma de cuadernillo contiene cuatro bloques de actividades de prueba que corresponden a las tres áreas evaluadas, Matemática, Lectura y Ciencias. Cada estudiante responde a un cuadernillo, lo que implica un total de tiempo de prueba de 120 minutos, la mitad de los cuales está destinado a resolver actividades del área foco y los otros 60 minutos para responder preguntas de Ciencias y Lectura.

El total del material de Matemática de la prueba está organizado en tres grupos: un grupo corresponde a un conjunto de ítems llamados de anclaje que permiten asegurar la comparabilidad de resultados con las aplicaciones anteriores de PISA; un segundo grupo de actividades son nuevas, con una amplia gama de dificultad (testeadas en el operativo piloto en 2011) y un tercer conjunto de ítems de dificultad baja.

Este último conjunto de ítemes está pensado para tener la oportunidad de describir qué saben hacer los jóvenes que por sus desempeños se ubican en el nivel más bajo de la escala de desempeño en el área, pues hasta el momento la prueba no había proporcionado ésta posibilidad.

4.4 Diseño de los ítemes de Matemática

Las actividades de prueba en Matemática presentan tres tipos de formato de respuesta: respuesta construida abierta, respuesta construida restringida e ítemes de selección de respuesta (múltiple opción simple o compleja).

Los ítemes de respuesta construida abierta solicitan una respuesta que el estudiante debe elaborar y expresar, en algunos casos se le solicita, además, mostrar los pasos seguidos o explicar cómo llegó a la respuesta dada. Estas respuestas requieren ser codificadas por docentes del área que son entrenados para realizar tal codificación sobre la base de una guía estandarizada que, al igual que todos los instrumentos de la evaluación, fue testada en el piloto del 2011.

Los ítemes de respuesta construida restringida ofrecen un entorno más estructurado para presentar la solución del problema y producen una respuesta que es codificada sin la necesidad del juicio de un experto. Los ítemes de selección de respuesta requieren la elección de una o más respuestas de un número limitado de opciones que, al igual que las últimas mencionadas, son procesadas automáticamente. Aproximadamente la misma cantidad de ítemes de cada tipo de formato han sido utilizados en la construcción de los instrumentos del estudio.

El estudio PISA en Matemática se compone de unidades de evaluación que presentan un estímulo verbal, acompañado, en algunos casos, con información brindada a través de tablas, cuadros, gráficos o diagramas. Estas unidades temáticas están compuestas, en general por más de una pregunta vinculada a ese estímulo. Este formato les da a los estudiantes la oportunidad de involucrarse con un contexto o problema y responder a una serie de preguntas que son independientes en cuanto a su resolución, pero que están vinculados temáticamente. Es importante destacar esta característica ya que el modelo de medición utilizado para analizar los datos de PISA asume la independencia de los ítemes, así que cuando las unidades comprenden más de una pregunta, el objetivo es garantizar la máxima independencia posible entre ellas. PISA usa esta estructura de actividades de prueba para facilitar el empleo de contextos que sean lo más auténticos posibles y que reflejen la complejidad de situaciones reales. Esta característica, además, posibilita un uso eficiente del tiempo de prueba y asegura un rango limitado de contextos en uso, de modo minimizar el riesgo de sesgo. Lo que se busca es un equilibrio entre estas dos demandas contrapuestas, evitar los sesgos en los contextos y lograr la independencia de las preguntas.

Otra consideración a la hora de seleccionar y desarrollar las actividades que integran el estudio es el nivel de lectura necesario para abordar con éxito el ítem. El objetivo es hacer la redacción de la actividad de prueba de Matemática simple y directa, tanto como sea posible.

4.5 Clasificación del logro de las respuestas de los ítems

Aunque la mayoría de los ítems se puntúan dicotómicamente (esto es, a las respuestas se les adjudica con crédito o sin crédito), las preguntas de respuesta construida abierta, en algunos casos, incluyen logro de crédito parcial. Esto permite que se les asigne crédito a las respuestas de acuerdo a los diferentes grados de acercamiento a la respuesta esperada. Para cada ítem se establece una guía detallada de codificación que permite establecer si a la respuesta dada por el estudiante le corresponde crédito completo, parcial, o sin crédito. Esta guía es proporcionada a los codificadores en el momento de ser entrenados en el Centro Nacional de cada país, para asegurar que la codificación de respuestas sea hecha de manera consistente, homogénea y confiable en todos los países participantes. Son variados los controles que se realizan centralmente, para todos los países participantes, de modo de conocer el grado de confiabilidad de la codificación de las respuestas a preguntas abiertas.

4.6 Informe de resultados en base a competencias

El estudio PISA brinda los resultados para cada una de las áreas evaluadas en diferentes formatos. Uno de ellos es una estimación de la competencia Matemática promedio de los estudiantes evaluados en cada país, así como el porcentaje de estudiantes que se ubican por sus logros en la prueba en cada uno de los niveles de desempeño por área. La tabla de niveles de desempeño que se presenta a continuación da una descripción de las habilidades en Matemática que demuestran tener los estudiantes según sus respuestas a las actividades de prueba. Esta descripción de niveles se generó en 2003 cuando Matemática fue foco de la evaluación PISA.

Nivel	Descripción de la competencia matemática en cada nivel de desempeño
6	En el nivel 6 los estudiantes pueden conceptualizar, generalizar y utilizar la información basada en sus investigaciones así como modelizar complejas situaciones problema. Pueden relacionar diversas fuentes de información y tipos de representación. Son capaces de aplicar pensamiento y razonamiento matemático avanzado, junto con un dominio de las operaciones matemáticas simbólicas y formales para desarrollar nuevos acercamientos y estrategias para enfrentarse a resolver situaciones nuevas. Puede formular y comunicar en forma precisa sus acciones y reflexiones con respecto a sus interpretaciones, discusiones y resultados y a la pertinencia de estos a las situaciones originales.
5	En el nivel 5 los estudiantes son capaces de desarrollar y trabajar con modelos para situaciones complejas, identificar limitaciones y especificar suposiciones. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias apropiadas de resolución de problemas para aplicar a los problemas complejos relacionados con estos modelos. Pueden aplicar estrategias usando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, representaciones relacionadas entre sí, expresiones simbólicas y formales y la visión matemática correspondiente a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones así como formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
4	En el nivel 4 los estudiantes logran trabajar con eficacia en modelos explícitos para situaciones complejas concretas que involucran restricciones o la necesidad de plantear supuestos. Son capaces de seleccionar e integrar diversas representaciones, incluyendo simbólicas, relacionándolas directamente con aspectos de situaciones del mundo real. Utilizan habilidades de pensamiento bien desarrolladas y razonan flexiblemente en estos contextos. Pueden construir y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
3	En el nivel 3 los estudiantes son capaces de ejecutar procedimientos claramente descritos, incluyendo los que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias simples de resolución de problemas. Pueden interpretar y utilizar representaciones basadas en diversas fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Desarrollan comunicaciones breves para reportar sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
2	En el nivel 2 los estudiantes interpretan y reconocen situaciones en los contextos que requieren solamente inferencia. Pueden extraer la información relevante de una sola fuente y hacer uso de un solo modo de representación. Aplican algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones. Son capaces de razonar directamente y de hacer interpretaciones literales de los resultados.
1	En el nivel 1 los estudiantes responden preguntas que involucren contextos familiares donde está presente toda la información relevante y las preguntas están planteadas directamente. Pueden identificar la información y realizar procedimientos rutinarios según instrucciones directas en situaciones explícitas. Realizan las acciones que son obvias y que se desprenden directamente de los estímulos dados.

Además de esta descripción general de la competencia Matemática en niveles de desempeño, en el ciclo 2012 se prevé desarrollar e informar el grado de desarrollo de cada una de las categorías de procesos cognitivos que constituyen una de las dimensiones de este marco: *formular situaciones matemáticamente, emplear conceptos, hechos, procedimientos, y razonamiento matemáticos; e interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos.*

Las capacidades matemáticas fundamentales que se describieron a partir de la página 20, desempeñan un papel central en la definición de lo que significa que los logros de los estudiantes se ubiquen en cada uno de los niveles de desempeño, al haber puesto en marcha los procesos detallados en cada nivel. La tabla describe el concepto de *competencia matemática* como un continuo cognitivo creciente en todos estos aspectos. Por ejemplo, en la descripción del Nivel 4, el segundo enunciado destaca aspectos de matematización y representación que son característicos de este nivel. La última afirmación destaca la característica de comunicación, razonamiento y argumentación que se observan en este nivel, que contrastan con las comunicaciones breves para reportar sus interpretaciones y razonamiento del nivel inmediato anterior y la reflexión sobre sus acciones del Nivel 5. El apéndice 1 de este documento, describe las capacidades matemáticas fundamentales y la relación que cada una tiene para la estructuración de los diferentes niveles de competencia matemática. En una sección anterior de este marco, cada uno de los procesos cognitivos presentes en la actividad matemática que la prueba PISA propone fue descrito en términos de capacidades matemáticas fundamentales que los individuos pueden activar al participar en el proceso de la resolución de las tareas presentadas.

Para darle continuidad al informe que se brindó en el área Matemática en el ciclo 2003 (anterior oportunidad en que fue foco del estudio) también se reportarán los resultados de desempeño según las cuatro categorías de contenido del marco: *Cantidad, Espacio y forma, Cambio y relaciones, e Incertidumbre y datos.* Estas escalas continuarán siendo interesantes para los países participantes, ya que aportan el perfil de la competencia matemática asociada a los distintos énfasis curriculares específicos.

5. ACTITUDES HACIA LA MATEMÁTICA

Las actitudes, creencias y emociones de las personas juegan, en general, un rol significativo en su interés por la Matemática y en la incorporación del tipo de pensamiento matemático en sus vidas. Los estudiantes que se sienten seguros al trabajar en Matemática, por ejemplo, son más propensos que otros a usarla en los diferentes contextos que se les presentan. Los estudiantes que tienen actitudes positivas hacia la Matemática están en condiciones de aprender mejor que los estudiantes que sienten ansiedad al tener que involucrarse a esta asignatura. Por lo tanto, un objetivo de la educación matemática es que los alumnos desarrollen actitudes, creencias y emociones que los hagan más propensos a usar con éxito la Matemática que conocen, a involucrarse y aprender más para beneficio personal y social.

La atención que la evaluación PISA 2012 con foco en Matemática da a estas variables se basa en que el desarrollo de actitudes, emociones y creencias positivas hacia la Matemática es, en sí mismo, un resultado valioso de la educación y predispone a los estudiantes a usarla en sus vidas y aprovecharla para la toma de decisiones cotidianas. Además, esas variables pueden contribuir, en alguna medida, a explicar las diferencias en los logros de los estudiantes y su ubicación en los niveles de *competencia matemática*. El estudio PISA, por lo tanto, incluye preguntas relacionadas con estas variables en el Cuestionario del estudiante.

El interés en Matemática tiene componentes relacionados con la actividad presente y futura de los jóvenes. Las preguntas referidas a este aspecto realizadas en el Cuestionario del estudiante se centran en el interés en Matemática de los alumnos, si consideran útil para la vida cotidiana lo que les es enseñado en el centro de estudios, así como sus intenciones de iniciar estudios superiores en Matemática o participar en carreras de orientación matemática. Existe preocupación internacional acerca de esta área, porque en muchos países participantes hay una disminución en el porcentaje de estudiantes que eligen estudios superiores relacionados con Matemática y Ciencias, mientras que al mismo tiempo hay una necesidad creciente en la sociedad de graduados en estas áreas.

La disposición de los estudiantes para hacer Matemática se refiere a las actitudes, emociones y creencias relacionadas consigo mismos, que favorecen o no el desarrollo de la competencia matemática.

Así entonces, PISA recaba datos sobre los desempeños de los alumnos en la prueba, sobre sus actitudes hacia la propia disciplina y sobre aspectos socio-económicos y culturales.

Con ese fin, solicita a los estudiantes y a los directores de los centros educativos que respondan sendos cuestionarios de aproximadamente 20 a 30 minutos de duración. Los datos recogidos en estos

cuestionarios son, por tanto, fundamentales para el análisis de los resultados académicos a la luz de una amplia gama de variables que caracterizan a los estudiantes y los centros de estudio.

Los resultados del estudio PISA 2012 serán información relevante tanto sobre los logros en Matemática como sobre las actitudes que se relacionan con los resultados de la escolarización. Se dispondrá de un panorama completo de cómo se vinculan estos conjuntos de variables y las de corte sociocultural y económico, a fin de que puedan ser tomados por los hacedores de políticas educativas de los países participantes y por la comunidad educativa internacional.

APÉNDICE I

Competencias matemáticas fundamentales y su relación con la dificultad del ítem

Un individuo que se enfrenta con éxito a un proceso de modelización en una variedad de contextos necesita haber desarrollado y poner en marcha ciertas habilidades matemáticas que, compuestas, pueden ser interpretadas como la competencia en el área. Cada una de las habilidades involucradas puede estar desarrollada en el individuo en diferentes niveles. Para evaluar el grado de competencia en Matemática, PISA seleccionó siete capacidades específicas identificándolas como las fundamentales de las que están involucradas en el proceso de modelización matemática.

A continuación, se define cada una de estas capacidades fundamentales a la vez que se relacionan con la dificultad de las tareas que están implicadas en las actividades de prueba.

Comunicar: el concepto de *Competencia matemática* implica *comunicación*. El sujeto percibe la existencia de un desafío y es estimulado a reconocer y entender una situación problema. Leer, decodificar e interpretar algunas afirmaciones, preguntas, tareas u objetos permiten al individuo formar un modelo mental de la situación, lo que es un paso importante en la comprensión, clarificación y formulación de un problema. Durante el proceso de resolución, la información puede necesitar aún mayor interpretación y los resultados intermedios pueden tener que ser resumidos y presentados. Una vez que se ha encontrado una solución a la propuesta, puede ser necesario presentarla y quizás habrá requerimientos de brindar una explicación o justificación.

Varios factores determinan el nivel y la dimensión de la demanda de comunicación de una tarea, y la habilidad de la persona para satisfacer esas demandas indica en qué medida ha desarrollado la capacidad de comunicación. Para los aspectos receptivos de la comunicación, estos factores incluyen la extensión y complejidad del texto u otro objeto a ser leído e interpretado, la familiaridad de las ideas o información a la que se refiere el texto u objeto, el grado en que la información requiere ser desligada de otra, la organización de la información y los procesos de pensamiento requeridos para interpretarla y utilizarla, así como la medida en que los diferentes elementos que necesitan ser interpretados (textos, gráficos, tablas, cuadros) se relacionan con los demás elementos presentes en la propuesta.

Para los aspectos expresivos de la comunicación, el menor nivel de complejidad se observa en tareas que exigen simplemente dar una respuesta numérica. Cuando se añade la exigencia de una respuesta, más extensa por ejemplo cuando se requiere dar una explicación o justificación oral o escrita, la exigencia en comunicación aumenta.

Matematizar: La *competencia matemática* puede implicar transformar un problema definido en el mundo cotidiano en una forma estrictamente matemática (que puede incluir estructurar, conceptualizar,

hacer suposiciones, formular un modelo) o interpretar una solución matemática o un modelo matemático en relación con el problema original en su contexto. El término *matematización* es utilizado para describir las actividades matemáticas fundamentales implicadas en esos procesos.

En algunas tareas, no se requiere matemización, ya sea porque el problema ya se encuentra expresado en términos matemáticos, o no se necesita la relación entre el modelo y la situación planteada para resolver ni para responder al problema.

La exigencia de matemización se presenta en su forma más simple cuando el individuo necesita interpretar e inferir directamente de un modelo dado; o traducir directamente de una situación intramatemática (por ejemplo, para identificar y seleccionar variables importantes, recoger medidas pertinentes, hacer diagramas). La exigencia de matemización aumenta cuando se requiere utilizar o modificar un determinado modelo para abarcar nuevas condiciones o interpretar relaciones deducidas, elegir un modelo familiar dentro de limitaciones y claras restricciones articuladas, o crear un modelo donde las variables requeridas, relaciones y limitaciones sean explícitas y claras. Un nivel aún más alto de demanda de matemización se relaciona con la necesidad de crear o interpretar un modelo en una situación donde muchos supuestos, variables, relaciones y limitaciones deben ser identificados y definidos, comprobar que el modelo satisface los requerimientos de la tarea, o evaluar o comparar modelos.

Representar: La *competencia matemática* involucra muy frecuentemente representaciones matemáticas. Esto puede suponer seleccionar, elaborar, interpretar, traducir y usar una variedad de representaciones para captar una situación, interactuar con un problema, o para presentar el trabajo realizado. Las representaciones referidas incluyen ecuaciones, fórmulas, gráficos, tablas, diagramas, imágenes, textos descriptivos y materiales concretos.

Esta habilidad matemática se asocia, en su nivel más bajo, con la necesidad de manejar directamente una representación familiar determinada, por ejemplo pasando directamente de texto a números o leyendo un valor llanamente, de un gráfico o tabla. Tareas de representación con mayores exigencias cognitivas se asocian a la selección e interpretación de una representación estándar o familiar, en relación a una situación y en un nivel más alto de exigencia aún, cuando requiere el uso simultáneo de dos o más representaciones diferentes en relación a una situación, incluyendo la modificación de una representación; o cuando la demanda es elaborar una representación sencilla de una situación. Un nivel más alto de la demanda cognitiva se caracteriza por la necesidad de entender y usar una representación no estándar que requiere una importante decodificación e interpretación, elaborar una representación que capte los aspectos claves de una situación compleja o comparar y evaluar diferentes representaciones.

Razonar y argumentar: Esta es una habilidad necesaria en todas las etapas y actividades asociadas con la *competencia matemática*. Esta destreza implica procesos de pensamiento arraigados que exploran y vinculan elementos del problema para hacer inferencias a partir de ellos, conectar variables y datos, comprobar la fiabilidad de una justificación dada o proveer una justificación a afirmaciones planteadas.

En tareas de demanda relativamente baja para activar esta habilidad, el razonamiento requerido implica simplemente seguir las instrucciones dadas. En un nivel de demanda ligeramente más alto, las tareas requieren alguna reflexión para conectar las diferentes partes de la información, con el fin de hacer inferencias (por ejemplo, vincular componentes separados presentes en el problema, o usar razonamiento directo dentro de un aspecto del problema). A un nivel más alto, las tareas requieren el análisis de la información para seguir o crear un argumento de varios pasos o conectar varias variables, o razonar desde fuentes de información vinculadas. A un nivel aún mayor de demanda, hay una necesidad de síntesis y evaluación de la información, usar o crear cadenas de razonamiento para justificar inferencias o hacer generalizaciones sobre la base y la combinación de múltiples elementos de información.

Elaborar estrategias: La *competencia matemática* frecuentemente requiere *elaborar estrategias* para resolver problemas matemáticamente. Esto implica un conjunto de procesos críticos de control que guían a un individuo a efectivamente reconocer, formular y resolver problemas. Esta habilidad se caracteriza por la selección o elaboración de un plan para usar Matemática, para resolver problemas originados de una tarea en un contexto, así como guiar su ejecución. Esta habilidad matemática puede ser demandada en cualquiera de las etapas del proceso de resolución de un problema.

En tareas con una demanda relativamente baja de esta habilidad, a menudo es suficiente tomar acciones directas en las que la estrategia necesaria es indicada, conocida u obvia. En un nivel ligeramente más alto de demanda, puede haber necesidad de decidir cuál es la estrategia adecuada que utilice la información dada para alcanzar una conclusión. La demanda cognitiva se incrementa con la necesidad de diseñar y construir una estrategia para transformar la información proporcionada y alcanzar una conclusión. Incluso las tareas más exigentes requieren la construcción de una estrategia, elaborada para encontrar una solución exhaustiva o una conclusión generalizada, o para evaluar o comparar diferentes estrategias posibles.

Usar lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones: Ser competente en Matemática requiere *Usar lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones*. Esto implica comprender, manipular y hacer uso de expresiones simbólicas regidas por convenciones y reglas matemáticas. También incluye la comprensión y utilización de construcciones formales basadas en definiciones, reglas y sistemas formales y también el uso de algoritmos con estas entidades. Los símbolos, reglas y sistemas utilizados pueden variar de

acuerdo a qué conocimiento del contenido matemático particular se necesita para formular, resolver o interpretar una tarea específica.

La demanda para la activación de estos procesos varía enormemente a través de las tareas. En tareas simples, no necesitan ser activadas reglas o expresiones simbólicas más allá de los cálculos aritméticos fundamentales, operaciones con números pequeños o fácilmente manipulables. Los trabajos con mayor demanda pueden incluir el uso directo de una relación funcional simple, ya sea implícita o explícita (por ejemplo, relaciones lineales familiares, fórmulas conocidas), el uso de símbolos matemáticos formales (por sustitución directa de variables o cálculos aritméticos con fracciones y decimales), o la activación y uso directo de definiciones matemáticas, convenciones o conceptos simbólicos. El incremento de la demanda cognitiva se caracteriza por la necesidad del uso explícito y manipulación de símbolos (por ejemplo, manipulación algebraica de una fórmula), o la activación y uso de reglas matemáticas, definiciones, convenciones, procedimientos o fórmulas utilizando una combinación de múltiples relaciones o conceptos simbólicos. Un nivel mayor de demanda se caracteriza por la necesidad de la aplicación de múltiples pasos de procedimientos matemáticos formales, trabajar en forma flexible con relaciones algebraicas o usar técnicas y conocimientos matemáticos para producir resultados.

Usar herramientas matemáticas: Esta habilidad que sustenta la *competencia matemática* en la práctica es *Usar herramientas matemáticas*. Hasta este ciclo los estudios PISA han estado basados en pruebas en papel, por lo tanto sólo ha sido posible incluir en forma muy superficial el uso de herramientas. El componente opcional (en el que solo algunos países participan) de la evaluación de la competencia matemática basada en computadora para PISA 2012 proporcionará a los estudiantes más oportunidades de usar herramientas matemáticas e incluir observaciones acerca de la forma en que las herramientas se utilizan como parte de la evaluación. Las herramientas matemáticas pueden ser físicas, como instrumentos de medición, así como calculadoras, e informáticas que se están volviendo cada vez más accesibles. Esta habilidad implica conocer y ser capaz de hacer uso de varios apoyos y herramientas que puedan ayudar a la actividad matemática en proceso y, lo que es muy importante, conocer sus limitaciones. Las herramientas matemáticas pueden, también, desempeñar un papel importante en la comunicación de resultados.

Tareas y actividades que implican un nivel relativamente bajo de demanda para esta habilidad pueden requerir el uso directo de herramientas familiares, como un instrumento de medición, en situaciones en las que el uso de esas herramientas es familiar. Mayores niveles de demanda surgen cuando el uso de herramientas implica una secuencia de pasos o vinculación de diferentes informaciones usando la herramienta, cuando la familiaridad con ellas es menor o cuando la situación en la que se aplica no es habitual. La demanda aumenta aún más cuando la herramienta debe utilizarse para procesar y relacionar

múltiples datos, cuando su aplicación se da en una situación muy diferente de las aplicaciones familiares, cuando la herramienta en sí es compleja y cuando se requiere una reflexión para entender y evaluar las ventajas y las limitaciones de ellas.

APÉNDICE II

Ítemes que ejemplifican el marco conceptual de la evaluación de la competencia matemática en PISA

Las Pizzas

El ítem *Las Pizzas*, que se muestra en la Figura 3, es de presentación sencilla y de interesante contenido.

Las pizzas

Una pizzería sirve dos pizzas redondas del mismo grosor y de diferente tamaño.

La más pequeña tiene un diámetro de 30 cm. y cuesta 30 zeds. La mayor tiene un diámetro de 40 cm. y cuesta 40 zeds.

¿Qué pizza es proporcionalmente más barata? Muestra tu razonamiento.

Figura 3: *Las Pizzas*

Puede ser utilizado para ilustrar varios elementos del marco de Matemática. Inicialmente fue utilizado en el primer estudio piloto en 1999 para el ciclo 2000. Luego, fue liberado con fines ilustrativos y ha sido utilizado como un ejemplo en cada versión del marco de Matemática publicado desde 2003. Este fue uno de los ítemes más difíciles utilizados en el conjunto de ítemes del estudio piloto, con solamente un 11% de respuesta correcta.

Las Pizzas está ubicado en un contexto *personal* con el cual muchos jóvenes de 15 años deberían estar familiarizados. La categoría de contexto es personal ya que se plantea una cuestión común para una persona en su vida cotidiana, que es decidir qué pizza ofrece al comprador la mejor relación calidad-precio. Presenta una demanda de lectura relativamente baja, lo que garantiza que los esfuerzos del lector puedan ser dirigidos, casi en su totalidad, a las intenciones matemáticas subyacentes de la tarea.

A diario, términos de la vida real deben ser interpretados matemáticamente (*redondo, igual grosor, diferentes tamaños*). La variable *tamaño* queda definida matemáticamente al conocer los diámetros de las dos pizzas. Los costos se proporcionan en moneda neutral (*zeds*). Tamaño y costo están relacionados a través del concepto de *relación calidad- precio*.

El ítem abarca varias áreas de contenido matemático. Tiene elementos geométricos que podrían clasificarlo como parte de la categoría de contenido *Espacio y Forma*. Las pizzas son circulares, de manera que se relaciona con el área de un círculo. La pregunta también implica la categoría de contenido *Cantidad* por la necesidad implícita de comparar la cantidad de pizza con la cantidad de dinero. Sin

embargo, la clave de este problema radica en la conceptualización de las relaciones entre las propiedades de las pizzas, diámetros- áreas y tamaño-precio. Debido a que estos aspectos están en el centro del problema, este ítem se clasifica como perteneciente a la categoría de contenido *Cambios y relaciones*.

El ítem pertenece a la categoría de proceso *formulación*. La principal demanda cognitiva es formular un modelo matemático que aborde el concepto de la relación *cantidad-precio*. La relación entre cantidad de pizza y cantidad de dinero puede ser modelada en base al “costo por unidad de área”. Dentro del mundo matemático, la relación cantidad-precio puede ser calculada directamente y comparada para los dos círculos obteniendo una cantidad mayor para el círculo de mayor diámetro. La interpretación en el contexto auténtico es que la pizza mayor representa mejor relación cantidad precio.

Una forma de razonamiento que revela aún más claramente la pertenencia del ítem a la categoría de contenido de *Cambio y relaciones* es la de plantear (explícita o implícitamente) que el área de un círculo aumenta en proporción al cuadrado del diámetro, por lo que se ha incrementado en la relación de $(4/3)^2$, mientras que el costo ha aumentado solamente en la proporción de $(4/3)$. Dado que $(4/3)^2$ es mayor que $(4/3)$, la pizza grande es más conveniente.

Mientras que la demanda principal y la clave para resolver este problema está en la formulación, también son evidentes en este ítem aspectos de los otros dos procesos matemáticos. El modelo matemático, una vez formulado, debe ser *empleado* efectivamente, con la aplicación de razonamiento apropiado y la utilización de cálculos de área y proporciones; a su vez, el resultado debe ser *interpretado* correctamente en relación con la pregunta original.

El proceso de solución de *Las Pizzas* exige la activación de las capacidades matemáticas fundamentales en distintos grados. La *Comunicación* se requiere en un nivel relativamente bajo tanto en lectura como interpretación del texto y un nivel algo superior al presentar y explicar la solución. La necesidad de *matematizar* la situación es una demanda clave del problema. La persona que se enfrenta a resolverlo debe elaborar una *representación* de los aspectos relevantes, incluyendo la representación simbólica de la fórmula para el cálculo del área, y la expresión de las razones que representen la *relación cantidad-precio*, con el fin de llegar a una solución. Las exigencias de *razonamiento* (por ejemplo, decidir que el grosor de las pizzas puede ser ignorado) son significativas, la necesidad de *elaborar estrategias* de cálculo y los procesos de modelización requeridos son también exigencias notables para este problema. El *Uso de lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones* entran en juego con el conocimiento conceptual y procedimiento requeridos para el cálculo del área del círculo y de proporcionalidad. El *Uso de herramientas matemáticas* está presente si los estudiantes utilizan una calculadora eficientemente, en un nivel relativamente bajo.

Las actividades de respuestas abiertas son codificadas por un docente entrenado específicamente para tales efectos. Los codificadores son docentes del área que se ajustan estrictamente a una Guía de codificación para emitir su juicio sobre las respuestas que presentan los alumnos, de tal forma que en todos los países en que se aplica la evaluación, las respuestas son valoradas de igual forma. En la Guía de codificación se da una descripción general de las respuestas que lograrán el Crédito completo, Crédito parcial (si existe) y el Sin Crédito, así como ejemplos de posibles respuestas.

La siguiente es la guía de codificación para la actividad *Las Pizzas*:

Crédito completo:

Reciben crédito completo las respuestas que muestran el razonamiento general de que el área de la superficie de la pizza aumenta más de prisa que el precio de la misma, concluyendo que la mayor es la mejor compra.

Por ejemplo:

- El diámetro de las pizzas coincide con su precio, pero la cantidad de la pizza obtenida se halla usando el diámetro al cuadrado, por lo que la mayor proporciona más cantidad por cada peso.

O

Respuestas que calculan el área y la cantidad por peso para cada pizza, concluyendo que la pizza mayor es la mejor compra.

Por ejemplo:

- El área de la pizza pequeña es $225 \times 3.14 = 706,5$; la cantidad de pizza por cada peso es $23,6 \text{ cm}^2$
- El área de la pizza grande es $400 \times 3.14 = 1256$; la cantidad de pizza por cada peso es $31,4 \text{ cm}^2$
- Por tanto la pizza mayor tiene mejor precio.

Sin crédito: Otras respuestas.

Por ejemplo:

- Ambas son igualmente caras.

O

Respuestas que son correctas pero con un razonamiento incorrecto o insuficiente.

Por ejemplo:

- La mayor.

En la Figura 4, se presenta un ejemplo de respuesta de un estudiante del ítem Las Pizzas. A una respuesta como esta se le otorgaría el crédito completo.

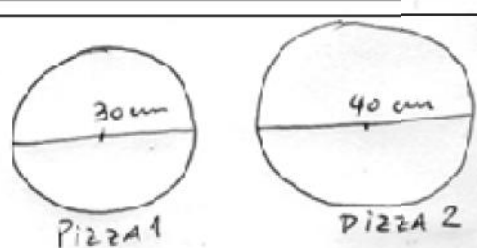
Una parte importante de la formulación	
Empleo de conocimientos de Espacio y Forma y Cantidad	<p>El grosor es el mismo entonces puedo Comparar áreas.</p> <p>Área de pizza 1 = πr^2 $= \pi \times 15 \times 15 \text{ cm}^2$ $= 706,5 \text{ cm}^2$</p> <p>Área de pizza 2 = $\pi \times 20 \times 20 \text{ cm}^2$ $= 12,56 \text{ cm}^2$</p>
Formulación de un modelo matemático para medir la relación calidad-precio	<p>Costo por cm^2 de Pizza 1 = $30 \text{ zeds} / 706,5 \text{ cm}^2$ $= 0,04 \text{ zeds/cm}^2$</p> <p>Costo por cm^2 de Pizza 2 = $40 \text{ zeds} / 12,56 \text{ cm}^2$ $= 0,03 \text{ zeds/cm}^2$</p>
Interpretación del resultado matemático en términos del mundo real	<p>La Pizza 2 es más barata por cm^2, entonces es mejor valor</p>

Figura 4. Ejemplo de respuesta de Las Pizzas

Basura

El ítem *Basura*, mostrado en la Figura 5, es también presentado para ilustrar aspectos del marco de evaluación de la competencia matemática en PISA.

Basura

Para hacer un trabajo en casa sobre el medio ambiente, unos estudiantes han recogido información sobre el tiempo de descomposición de varios tipos de basura que la gente desecha:

Tipo de basura	Tiempo de descomposición
Cáscara de banana	1-3 años
Cáscara de naranja	1-3 años
Cajas de cartón	0.5 año
Chicles	20-25 años
Periódicos	Unos pocos días
Vasos de plástico	Más de 100 años

Un estudiante piensa en cómo representar los resultados mediante un diagrama de barras.

Da **una** razón de por qué no resulta adecuado un diagrama de barras para representar estos datos.

Figura 5: *Basura*

Este ítem de *respuesta abierta* fue dado a conocer luego de ser utilizado en el estudio principal de PISA 2003. El porcentaje promedio de respuestas correctas de este ítem en los países de la OCDE fue de un poco más del 51%. En Uruguay alcanzó un porcentaje de respuesta correcta del 36% con una omisión de respuesta que llegó al 32% mientras que en los países de la OCDE este porcentaje fue sólo del 16%. Resultan preocupantes los altos índices de omisión de respuesta que se registran en nuestro país, si se compara con los porcentajes que recogen los demás países. Es por ese motivo que el Centro Nacional de

la evaluación ha hecho especial énfasis en el momento de las reuniones informativas y de entrenamiento de los coordinadores de centro en la motivación a los alumnos que participan de la evaluación en cuanto a la necesidad de que realicen su mejor y mayor esfuerzo en el momento de contestar a las actividades de prueba para que esta situación se pueda revertir.

El ítem se ubica en un contexto *científico*, ya que se trata de datos de tiempos de descomposición. La categoría de contenido matemático es *Incertidumbre*, ya que se relaciona principalmente con la interpretación y presentación de datos. *Cantidad* está involucrada en la exigencia implícita para apreciar los tamaños relativos de los intervalos de tiempo involucrados. La categoría de proceso matemático es *interpretar, aplicar y evaluar resultados matemáticos* ya que la atención se centra en evaluar la eficacia del resultado de diseñar una representación matemática (en este caso realizar un gráfico de barras imaginado o dibujado) al interpretar los datos acerca de elementos contextualizados. El ítem implica un razonamiento acerca de los datos presentados, pensamiento matemático sobre la relación entre todos los datos y su presentación, y evaluación del resultado. Quien se enfrenta a resolver el problema debe reconocer que estos datos son difíciles de presentar eficazmente en un gráfico de barras, por una de las siguientes razones: ya sea por la amplia gama de tiempos de descomposición para algunas categorías de basura (esta gama no puede visualizarse fácilmente en un gráfico de barras estándar); o debido a la gran variación en la variable tiempo a través de los tipos de basura (para que un eje de tiempo permita representar períodos más largos, los períodos más cortos serían invisibles).

La guía de codificación para esta actividad se muestra en la figura 6

Crédito completo

La razón se basa en las grandes variaciones de los datos.

- La diferencia en la longitud de las barras del gráfico de barra sería demasiado grande.
- Si hacemos una barra de 10 centímetros de longitud para el poliestireno, la barra para cajas de cartón sería de 0,05 centímetros.

O

Razones focalizadas en la variación de los datos de algunas categorías.

- La longitud de la barra para “vasos de poliestireno” no está determinada.
- No se puede hacer una barra para 1 a 3 años o una para 20 a 25 años.

Sin crédito

Otras respuestas.

- Porque no funcionará.
- Es mejor un pictograma.
- No se puede verificar la información.
- Porque los números en la tabla son solo aproximaciones.

O

Pregunta no respondida.

Figura 6: Guía de codificación del ítem Basura

De acuerdo a la guía antes presentada, a los siguientes ejemplos de respuesta se les otorga Crédito Completo:

Respuesta 1:

“Porque sería difícil hacer un gráfico de barras ya que hay 1-3, 1-3, 0.5, etc. Entonces sería difícil hacerlo exactamente.”

Respuesta 2:

“Porque hay una gran diferencia desde la puntuación más alta a la más baja, por lo que sería difícil estar seguro con 100 años y pocos días.”

El proceso de solución de la actividad *Basura* exige la activación de capacidades matemáticas fundamentales como las siguientes:

Comunicación: interviene en la necesidad de leer el texto e interpretar la tabla, y también en un nivel superior con el requerimiento de responder con un razonamiento breve por escrito. La exigencia de *matematizar* la situación se plantea en un nivel bajo, al requerir identificar y extraer las características de un gráfico de barras y de cada tipo de basura considerada. La persona que se enfrenta al problema debe interpretar una simple *representación* tabular de datos, imaginar una representación gráfica; vincular estas dos representaciones es una demanda clave del ítem. Las exigencias de *razonamiento* del problema están a un nivel relativamente bajo, así como la necesidad de *elaborar estrategias*. *Uso de lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones* entra en juego con el conocimiento de los procedimientos y hechos requeridos para imaginar la construcción de gráficos de barras o para hacer un bosquejo rápido, y particularmente con la comprensión de la escala necesaria para imaginar el eje vertical. El *Uso de herramientas matemáticas* probablemente no sea necesario.

Concierto de Rock

En la Figura 7 se presenta un ítem muy ilustrativo, *Concierto de Rock*.

Concierto de Rock

Para un concierto de rock se reservó para la audiencia, un campo rectangular de 100 m por 50 m. Las entradas para el concierto se agotaron, y el sitio estaba lleno, con todos los fans de pie.

¿Cuál de las siguientes cifras constituye la mejor estimación del número total de asistentes al concierto?

- A 2 000
- B 5 000
- C 20 000
- D 50 000
- E 100 000

Figura 7. Concierto de Rock

Este ítem de múltiple opción fue utilizado en la prueba piloto de PISA 2003, y luego fue hecho público con propósitos ilustrativos. Alrededor del 28% de los estudiantes de la muestra respondieron a este ítem correctamente (20.000 personas), convirtiéndolo en un ítem de dificultad moderada en relación con el conjunto de ítems utilizados en la prueba piloto. *Concierto de Rock* se ubica en un contexto *social*, porque el ítem trata de la organización de un evento musical, aunque se basa en la experiencia personal de estar entre multitudes. Se clasifica dentro de la categoría de contenido *Cantidad* debido a los cálculos numéricos requeridos, aunque también tiene algunos elementos que se relacionan con la categoría *Espacio y Forma*. Al ser un ítem de formato de respuesta cerrada de múltiple opción, la guía de codificación es muy simple.

Crédito completo:

Opción C: 20.000

Sin crédito:

Otras respuestas.

En la resolución de este ítem es necesario evocar cada una de las tres categorías de procesos, pero la exigencia primaria proviene de la *formulación de situaciones matemáticamente*, con la necesidad de dar sentido a la información contextual proporcionada (el tamaño y la forma del campo; el lugar para el público en el concierto de rock está lleno; los fans están de pie) y traducirla a una forma matemáticamente adecuada. También existe la necesidad de identificar la información que falta, pero que podría ser estimada razonablemente. Concretamente es necesario elaborar un modelo para el espacio requerido por un fan o un grupo de fans. El estudiante que se plantea resolver este problema necesita *usar conceptos matemáticos, hechos, procedimientos y razonamiento* para vincular el área del campo y el área ocupada por un fan del total de fans, haciendo las comparaciones cuantitativas necesarias. La *interpretación, aplicación, y evaluación de resultados matemáticos* es requerida para verificar la racionalidad de la solución, o evaluar las opciones de respuesta frente a los resultados matemáticos de los cálculos realizados.

Un modelo alternativo es imaginar a los fans parados uniformemente en filas de igual longitud en todo el campo y estimar el número de fans multiplicando el número de filas estimado por el número de personas (también estimado) en cada fila. Para esta pregunta entran en juego las capacidades matemáticas fundamentales en las siguientes maneras. *Comunicación* es requerida en un nivel relativamente bajo con la necesidad de leer y entender el texto. La importancia matemática de la palabra *rectangular*, la frase *el terreno se llenó de fans* y la instrucción de *estimar*, deben ser interpretadas y entendidas completamente. La tarea tiene una demanda de *matematización* significativa, ya que resolver el problema requiere hacer ciertos supuestos acerca del espacio que una persona parada puede ocupar, así como crear un modelo básico como $(\text{número de fans}) \times (\text{promedio de espacio para un fan}) = (\text{área del campo})$. Para ello se debe *representar* la situación mentalmente o mediante un diagrama, como parte de la formulación del modelo, para vincular el espacio para un fan con el área del campo. *Elaborar una estrategia* entra en el proceso de resolución del problema en varias etapas, como al decidir sobre la forma en que el problema debería ser abordado, el imaginar qué tipo de modelo podría ser útil para captar el espacio ocupado por un fan en el concierto, y el reconocer la necesidad de algunas verificaciones y procedimientos de validación. Una estrategia de solución implicaría postular un área para cada persona, multiplicándola por el número de personas que figuran en cada una de las opciones proporcionadas y comparar el resultado con las condiciones dadas en la pregunta. También es posible hacer el razonamiento inverso empezando por el área proporcionada y trabajando hacia atrás con cada una de las opciones de respuesta para calcular el correspondiente espacio por persona, y decidiendo cuál se adapta mejor a los criterios establecidos en la pregunta. *Uso de lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones*, entra en juego con la implementación de cualquier estrategia adoptada, mediante la interpretación y uso de las dimensiones proporcionadas y en la ejecución de los cálculos requeridos para relacionar el área del campo con el área

por persona. *Razonamiento y argumentación* entran en juego con la necesidad de pensar claramente acerca de la relación entre el modelo elaborado, la solución resultante y el contexto real, con el fin de validar el modelo utilizado y verificar que fue elegida la respuesta correcta. *Uso de herramientas matemáticas* es poco probable que se necesite.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANEP, Gerencia de Investigación y Evaluación, (2004). La evaluación de la “Cultura Matemática” en PISA 2003. Marco conceptual y actividades de las pruebas, 24, 30-32. Montevideo
- OCDE, PISA, (2010). Draft framework for the assessment of mathematics in PISA 2012. Paris.
- National Academy Press, Steen (1990). On the shoulders of giants: New approaches to numeracy, Washington, D.C.